Алгебра

7

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ФГОС

Алгебра

7 класс

Учебник
для общеобразовательных
учреждений

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

Москва
«Просвещение»
2012

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

Авторы:

**Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва,
Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин**

На учебник получены положительные заключения
Российской академии наук (№ 10106-5215/588 от 14.10.2011)
и Российской академии образования (№ 01-5/7д-339 от 17.10.2011).

А45 **Алгебра.** 7 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений/ [Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин]. — М. : Просвещение, 2012. — 319 с. : ил. — ISBN 978-5-09-026877-6.

Данный учебник является первой частью линии учебников алгебры для 7—9 классов, отвечающих всем требованиям федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования. Изложение учебного материала ведётся на доступном уровне с учётом деятельностного подхода. Основными содержательными линиями курса являются: числовая, уравнений, неравенств, функциональная, алгебраических преобразований, стохастическая, логических высказываний, мировоззренческая. Учебник содержит материал, изложенный в форме занимательных диалогов, развивающий метапредметные умения и личностные качества учащихся.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-09-026877-6

Введение

Поговорим об алгебре

Алгебра — новый учебный предмет, который появился в вашем расписании. Но с ней вы уже знакомы. Помните правила: $a + b = b + a$, $a(b + c) = ab + ac$? Записывая эти правила, вы пользовались языком алгебры — раздела математики, обобщающего и развивающего знания о действиях с числами. Слово а л г е б р а произошло от арабского а л - д ж е б р, что означает в о с с т а н о в л е н и е. Подробности о происхождении названия изучаемого вами раздела математики вы найдёте на страницах этого учебника.

Вспомните, как в 6 классе вы решали уравнения. Например, $x + 2 = 7$, откуда $x = 7 - 2$, $x = 5$. При изучении алгебры вы научитесь легко решать и более сложные уравнения. К примеру, в 8 классе вы устно сможете решить такое уравнение: $x^2 - 5x + 6 = 0$. В младших классах вы, наверное, поняли, что некоторые текстовые задачи легче решаются с помощью уравнений, нежели арифметически — по действиям. Важно только правильно составить уравнение по условию задачи. Этому вас тоже научит алгебра.

Сегодня алгебра используется специалистами в разных областях знаний (в физике, астрономии, химии, биологии, медицине, информатике, социологии, лингвистике и т. д.), а также грамотными людьми для решения возникающих практических задач.

Геометрия, которую вы будете изучать с этого учебного года, тоже не обходится без алгебры. С некоторыми формулами геометрии вы уже знакомы (с формулами для вычисления площадей, объёмов и др.), с какими-то встретитесь впервые. Кто-то из вас, возможно, сам выведет новые формулы и соотношения. Например, можно заметить любопытную закономерность в соотношении количества рёбер (Р), вершин (В) и граней (Г) всех существующих многогранников: Р = В + Г − 2 (см. рис.).

Занятия алгеброй помогут вам развить мышление, память, внимание, интуицию, научиться обосновывать свои высказывания.

Тетраэдр	Куб	Четырёхугольная пирамида	Октаэдр
			
Р = 6	Р = 12	Р = 8	Р = 12
В = 4	В = 8	В = 5	В = 6
Г = 4	Г = 6	Г = 5	Г = 8
6 = 4 + 4 − 2	12 = 8 + 6 − 2	8 = 5 + 5 − 2	12 = 6 + 8 − 2

Как работать с учебником

Во-первых, до того как начнёте выполнять заданные на дом упражнения, читайте тексты параграфов — они написаны понятным языком и содержат образцы решения задач. После прочтения текста параграфа отвечайте на Устные вопросы: находите ответы на них в тексте, учите определения новых понятий, теоремы, алгоритмы. С помощью Вводных упражнений делайте гимнастику ума — повторяйте ранее изученное, чтобы легче было выполнять основные Упражнения по теме.

Читайте Диалоги об истории, чтобы расширить свой кругозор и понять, откуда и почему появилось в алгебре то или иное понятие, в какие века люди уже знали то, что вам только ещё предстоит узнать.

Разговоры о важном, которые ведёт Профессор с учениками, помогут вам понять непростые вопросы теории и практики.

Если в тексте учебника вы встретите забытое понятие, то в Предметном указателе в конце учебника посмотрите номер страницы, на которой можно найти определение этого понятия. После решения задач и упражнений сверяйте свои ответы с Ответами в конце учебника.

Во-вторых, приучите себя читать текст с карандашом в руках. Помечайте аккуратно на полях книги знаком вопроса то, что вам непонятно. Выясняйте этот вопрос у учителя или присылайте его нам, авторам, по адресу: 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41, редакция математики, авторам учебника: Ю. М. Колягину, М. В. Ткачёвой, Н. Е. Фёдоровой, М. И. Шабунину.

В-третьих, обращайте внимание на сигнальные знаки на полях книги. Они помогут вам выделить в тексте существенные моменты: *важные выводы*, *рациональные способы действий*, *связь алгебры с жизнью и другими учебными предметами*, *полезную и интересную информацию*, *новые термины и понятия* и др.

После изучения каждой главы проверяйте свои знания и умения с помощью задач рубрики Проверь себя! Эти задания разделены на три уровня сложности, как и основные упражнения учебника: обязательный, продвинутый и сложный (для интересующихся математикой).

Внутри текста используются следующие обозначения:

! — формулировки определений, теорем, правил

|| — выделение важного материала

1)
2) — порядок действий, алгоритм

▶, ◁ — начало и окончание решения задачи

●, ○ — начало и окончание обоснования утверждения или вывода формулы

17. — обязательные упражнения

43. — дополнительные более сложные упражнения

$\boxed{85.}$ — трудные упражнения

ГЛАВА 1

Алгебраические выражения

Как говорилось во введении, алгебра выросла из арифметики и обобщила с помощью букв свойства чисел и правила действий с ними.

Исаак Ньютон

В своей книге «Всеобщая арифметика», изданной в 1707 г., знаменитый английский учёный *Исаак Ньютон (1642—1727)* писал: «Вычисления производятся либо при помощи чисел, как в обыкновенной арифметике, либо при помощи букв, как в алгебре. Оба приёма основаны на одинаковых принципах и ведут к одной цели, причём арифметика — частным путём, алгебра же — всеобщим». Ньютон называл буквы, знаки действий, алгебраические выражения и уравнения **языком алгебры**.

Вы знаете, что числовые выражения состоят из чисел, скобок и знаков арифметических действий. В алгебраических выражениях встречаются и буквы. С простейшими алгебраическими выражениями вы уже встречались: $a+b$, $v \cdot t$, $2x-3$ и т. п. Поэтому материал этой главы, посвящённый использованию букв в алгебре, будет понятен всем — представляйте лишь, что за буквами спрятаны числа.

В этой главе мы будем говорить о формулах — *моделях* разных явлений. Например, формула

$$a=b \cdot c$$

является моделью многих реальных процессов. Если её записать с помощью других букв, вы вспомните, что пользовались ею неоднократно:

$s=v \cdot t$ — формула пройденного пути s за время t при движении со скоростью v;

$P=n \cdot c$ — формула стоимости P покупки n единиц товара по цене c;

$S=a \cdot b$ — формула площади S прямоугольника со сторонами a и b.

Изучая эту главу, вы узнаете, что нерационально, например, находить значение выражения $\left(\frac{1}{25}v + 0{,}92v\right) \cdot t + 0{,}04vt$ при $v = 0{,}07$ и $t = 90$, не упростив его предварительно. Действительно, после упрощения это выражение принимает вид $v \cdot t$ и его числовое значение можно найти устно.

§ 1 Числовые выражения

Так как алгебра выросла из арифметики, необходимо повторить всё, что вам известно о числах, о порядке выполнения действий с числами, о составлении числовых выражений и равенств. Этому повторению и посвящён материал параграфа.

Нужно вспомнить:

- таблицу умножения;
- действия сложения, вычитания, умножения и деления целых чисел, десятичных и обыкновенных дробей;
- понятие процента, нахождение процентов от числа и числа по его процентам.

Разговор о важном

Профессор, таблицу умножения мы помним ещё из начальной школы. Думаю, что в действиях с дробями ошибаться не будем. Но проценты...

Действительно, проценты мы изучали давно и совсем недолго. Многое забыли. Помним лишь, что задачи на проценты — самые трудные. А учебники мы сдали в школьную библиотеку. Даже почитать о процентах негде.

Согласен, что задачи на проценты не всегда легко решаются. Но специально «для воспоминаний» в конце книги помещён раздел **«Повторение математики 5—6 классов»**. Заглядывайте в него чаще, там вы найдёте и определение процента, и разобранные задачи на проценты, правила действий с обыкновенными и десятичными дробями и многое другое.

Задача 1. Из коробки, содержащей 100 карандашей, отложили 32 карандаша, а остальные поделили поровну между семнадцатью учениками. Сколько карандашей получил каждый ученик?

► После того как из коробки взяли 32 карандаша, в ней осталось $(100-32)$ карандашей. Чтобы узнать, сколько карандашей получил каждый ученик, нужно найти значение выражения $\frac{100-32}{17}$. В результате получим 4.

Ответ. Каждый ученик получил 4 карандаша. ◁

При решении задачи использовалась запись $\frac{100-32}{17}$ (черта дроби заменяет знак деления), состоящая из чисел, соединённых знаками арифметических действий.

Напомним, что такие записи называют **числовыми выражениями**. Приведём ещё примеры числовых выражений:

$$2\cdot3+7;\ \ 10:2-3;\ \ \frac{4\cdot0{,}5+3}{5};\ \ \frac{1}{2}-\frac{1}{3}.$$

Если в числовом выражении выполнить указанные действия, то получится число, которое называют **значением** этого **числового выражения** или, короче, значением выражения.

Например, значением выражения $\frac{100-32}{17}$ является число 4; значением выражения $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ является число $\frac{1}{6}$.

Числовое выражение может состоять из одного числа. Иногда в числовом выражении, кроме чисел и знаков действий, используются скобки. Например, в выражении

$$(2{,}5+3{,}5)\cdot2{,}1$$

содержатся скобки. Вычислив значение этого выражения, получим число 12,6. Поэтому можно записать:

$$(2{,}5+3{,}5)\cdot2{,}1=12{,}6.$$

Слева и справа от знака «=» стоят числовые выражения.

Два числовых выражения, соединённые знаком «=», образуют **числовое равенство**.

Если значения левой и правой частей числового равенства совпадают, то равенство называют **верным**. Например, $\frac{15+1}{2}=7+1$ — верное равенство, так как значения его левой и правой частей совпадают и равны 8.

Если значения левой и правой частей равенства не совпадают, то равенство называют **неверным**. Например: $5=2$, $(22-10):3=6$ — неверные равенства.

Задача 2. Найти значения выражений $6+12\cdot3$ и $(6+12)\cdot3$.

► Используя известный порядок действий, получаем такие результаты: $6+12\cdot3=6+36=42$, $(6+12)\cdot3=18\cdot3=54$. ◁

Этот пример напоминает, что скобки могут влиять на результат выполнения действий.

Известно, что:

- сложение и вычитание называют **действиями первой ступени;**
- умножение и деление — **действиями второй ступени;**
- возведение в квадрат и куб — **действиями третьей ступени.**

При нахождении значения числового выражения принят следующий **порядок выполнения действий:**

1) Если выражение не содержит скобок, то сначала выполняют действия третьей ступени, затем действия второй ступени и, наконец, действия первой ступени; действия одной и той же ступени выполняют в том порядке, в котором они записаны. Например:

$$3 \cdot 5^2 \cdot 4 - 5 \cdot 4 + 7 = 3 \cdot 25 \cdot 4 - 5 \cdot 4 + 7 =$$
$$= 300 - 20 + 7 = 287.$$

2) Если выражение содержит скобки, то сначала выполняют все действия над числами, заключёнными в скобках, а затем все остальные действия; выполнение действий над числами в скобках и вне их производится в порядке, указанном в п. 1. Например:

$$(2^3 \cdot 4 - 7) \cdot 6 - (3 + 2 \cdot 4) = (8 \cdot 4 - 7) \cdot 6 - (3 + 2 \cdot 4) =$$
$$= (32 - 7) \cdot 6 - (3 + 8) = 25 \cdot 6 - 11 = 150 - 11 = 139.$$

3) Если вычисляется значение дроби, то сначала выполняются действия в числителе дроби и в знаменателе, а затем первый результат делится на второй. Например:

$$\frac{2 \cdot 3^3 + 6 \cdot 5}{3 + 5^2} = \frac{2 \cdot 27 + 6 \cdot 5}{3 + 25} = \frac{54 + 30}{3 + 25} = \frac{84}{28} = 3.$$

4) Если выражение содержит скобки, заключённые внутри других скобок, то сначала выполняют действия во внутренних скобках. Например:

$$2 \cdot (8 - (5^2 - 4)) = 2 \cdot (8 - (25 - 4)) =$$
$$= 2 \cdot (8 - 21) = 2 \cdot (-13) = -26.$$

Задача 3. Вычислить $\dfrac{5{,}2 + 3{,}9 \cdot 2 - (14{,}7 + 5{,}3) : 4}{3{,}5 - 1{,}5 \cdot 5}$.

► Выполним вычисления, используя правила о порядке действий:

1) $14{,}7 + 5{,}3 = 20$; 2) $3{,}9 \cdot 2 = 7{,}8$; 3) $20 : 4 = 5$;
4) $5{,}2 + 7{,}8 - 5 = 8$; 5) $1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5$; 6) $3{,}5 - 7{,}5 = -4$;
7) $8 : (-4) = -2$. ◁

Диалог об истории

Алгоритм

Профессор, когда я слышу слова «порядок выполнения действий», мне хочется заменить их одним словом — алгоритм. Можно сказать, что мы в этом параграфе повторили алгоритм нахождения значения числового выражения?

Конечно можно. Давайте я расскажу историю возникновения этого термина, а вы вспомните, с какими алгоритмами вы уже знакомы.

Алгоритм — это латинизированный перевод имени *ал-Хорезми*, одного из основоположников алгебры. В Средние века алгоритмом называли любой научный труд, в котором решались вопросы арифметики, вычислений. Позже так стали называть систему правил счёта в десятичной позиционной системе счисления.

Со временем словом «алгоритм» стали обозначать всякий систематизированный приём вычисления. Сегодня понятие алгоритма используется ещё шире — им обозначают *правило, следуя которому можно решить задачу определённого типа* (выполняя при этом действия в строго установленном порядке).

Вам, например, знакомы алгоритмы нахождения НОК и НОД, неизвестных компонентов арифметических действий, вычисления площади прямоугольника и другие.

Устные вопросы и задания

1. Что называют значением числового выражения?
2. Привести пример верного; неверного числового равенства.
3. Какие действия относят к действиям первой ступени; второй ступени; третьей ступени?
4. Какой порядок выполнения действий применяют при нахождении значения числового выражения?

Вводные упражнения

1. (Устно.) Вычислить:

1) $7 \cdot 8$; 2) $6 \cdot 7$; 3) $92 : 4$; 4) $91 : 7$;

5) $15 - 18$; 6) $-40 + 31$; 7) $-21 + 18$; 8) $-34 - 9$;

9) $-27 \cdot 3$; 10) $54 : (-6)$; 11) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$; 12) $1\frac{1}{16} - \frac{5}{16}$;
13) $\frac{1}{15} \cdot \frac{5}{8}$; 14) $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$; 15) $5 \cdot 0{,}01$; 16) $3 : 0{,}01$.

2. (Устно.) Вычислить:
1) $12 : (3-1)$; 2) $10 - 3^2$; 3) $10 + (-3)^2$; 4) 2^3; 5) $(-2)^3$.

Упражнения

1. Вычислить:
1) $75 - 3{,}75$; 2) $0{,}48 \cdot 25$; 3) $\frac{2}{3} - 2$; 4) $\frac{4}{7} : 8$;
5) $5\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{11}$; 6) $1\frac{1}{7} : \frac{1}{14}$; 7) $-18 : (-4{,}5)$; 8) $(-10{,}5) \cdot 0{,}4$.

2. Записать в виде числового выражения:
1) произведение суммы и разности чисел 13 и 17;
2) удвоенное произведение чисел $\frac{1}{3}$ и 2,7.

3. Записать в виде числового равенства и проверить, верно ли оно:
1) сумма чисел $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$ равна разности чисел $\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{15}$;
2) произведение чисел 40 и 0,03 равно частному от деления числа 6 на число 5;
3) удвоенная разность чисел 10 и -2 в три раза больше суммы этих же чисел;
4) утроенная сумма чисел 2 и 6 в два раза больше произведения этих же чисел.

4. В кассе кинотеатра продано 154 билета по 250 р. и 76 билетов по 300 р. Сколько денег получено за все билеты?

5. Указать порядок выполнения действий и вычислить:
1) $1{,}7 \cdot 3^2 + \frac{2}{3} \cdot 12 - 15$; 2) $27{,}7 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 100 + 6{,}4 : 0{,}8$;
3) $48 \cdot 0{,}05 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 54 + 1{,}7$; 4) $(2{,}5)^2 + 15 \cdot \frac{2}{3} - 0{,}24 : 0{,}6$.

6. Найти значение числового выражения:
1) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right)$; 2) $\left(\frac{2}{7} - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{13} - \frac{1}{2}\right)$; 3) $4\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \left(1\frac{7}{9} - \frac{4}{9}\right)$;
4) $5\frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \left(1\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)$; 5) $\left(3\frac{1}{3} \cdot 3^2 - 17\right) : 13 - 0{,}07$.

7. Выполнить действия:

1) $\dfrac{0{,}3 \cdot 5^2 - 15}{3{,}5 + 2^2}$;   2) $\dfrac{4{,}2 : 6 - 3\frac{1}{3} \cdot 0{,}3}{7{,}5 : 0{,}5}$;

3) $13\frac{1}{3} \cdot (18{,}1 - (3^2 + 6{,}1))$;   4) $((7{,}8 : 0{,}3 - 3^3) + 3{,}1) : 0{,}7$.

8. Записать в виде равенства и проверить, верно ли оно:
1) 20% от числа 240 равны 62;
2) число 18 составляет 3% от числа 600;
3) произведение чисел $15\frac{2}{5}$ и 5 составляет 11% от числа 700;
4) четвёртая часть числа 18 равна 5% от числа 90;
5) 111 : 3 равно 10% от числа 370;
6) 650% от числа 12 равны 77.

9. Не выполняя действий, объяснить, почему является неверным равенство:

1) $18{,}07 - 23{,}2 \cdot 5 = 78{,}93$;   2) $0{,}48 \cdot 17 = 81{,}6$;

3) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{7} = 1\frac{1}{21}$;   4) $\frac{3}{7} \cdot (-0{,}49) = 2{,}1$;

5) $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot (-0{,}3) = \frac{12}{13}$;   6) $\frac{4}{3} \cdot \frac{7}{5} \cdot 1{,}1 = \frac{13}{14}$.

10. Чтобы успеть к отходу поезда, группа туристов должна пройти 22 км до станции за 6,5 ч. Туристы решили двигаться в следующем режиме: сначала идти со скоростью 4 км/ч, делая через каждые 1,5 ч пятнадцатиминутный привал, а по прошествии 5,25 ч снизить скорость до 3 км/ч и идти без привалов. Успеют ли они прибыть на станцию до отхода поезда?

Диалог об истории

Как раньше записывали числа и знаки действий?

Цифры, которыми мы сегодня записываем числа, создавались на протяжении многих веков. До возникновения письменности числа изображались рисунками, отмечались зарубками на палках, узлами на верёвках и т. п. Так, например, римские цифры (I, II, III, IV, V, VI, ...) хранят память обозначения чисел чёрточками, засечками.

После создания письменности в разных странах для обозначения цифр и чисел стали использовать буквы. А чтобы цифры и числа отличать, в Древней Греции, например, над «цифрами» ставили горизонтальную черту, в славянских странах — знак *титло*.

А как в Древней Греции записали бы, например, $1+2$?

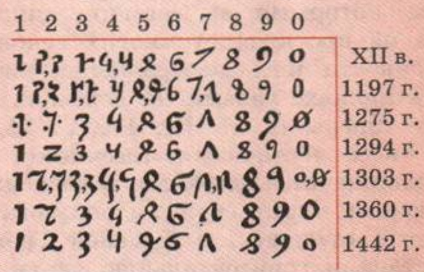
Прежде чем ответить на твой вопрос, кое-что расскажу. Вы, наверное, помните из истории Древнего мира, что в замечательном городе Александрии в III в. жил великий учёный *Диофант*. Он придумал специальные знаки, заменяющие слова «равно», «отнять» и др. Вместо слова «равно» он стал писать букву ι — первую букву слова ισος — «исос» — равный. Знак вычитания «⋔» Диофант образовал от перевёрнутой буквы ψ; без знака сложения он обходился просто, записывая слагаемые рядом. Вместо $1+2$ он записал бы $\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$, а вместо $1-2$ записал бы $\overline{\alpha}\pitchfork\overline{\beta}$.

Диофант

Профессор, а почему сегодня мы нигде не встречаем записей таких красивых цифр?

Вы можете заметить, что *алфавитные нумерации* неудобны тем, что «цифра» на любом месте (позиции) обозначает только себя. Например, в римской нумерации цифра пять (V) и в записи числа четыре (IV), и в записи числа шесть (VI) обозначает себя. При таком обозначении чисел действия с ними выполнять не очень удобно. Возможность облегчённого письменного счёта (сложения и умножения столбиком и др.) даёт *позиционная система счисления* — в зависимости от позиции в записи числа цифра берёт на себя разные функции. Так, в записи числа 15 цифра 5 обозначает пять единиц, а в записи числа 51 — пять десятков.

Цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 называются *арабскими*, хотя правильнее было бы их назвать индийскими. Эти цифры возникли примерно 1500 лет назад в Индии. Арабы позаимствовали их у индусов, а мы в XVII в. — у арабов. Любопытно проследить, как видоизменялись индийские (арабские) цифры, пока приобрели практически современный вид.



Это интересно

Числовые суеверия

Числовые суеверия, как и многие другие, пришли к нам из древности. Хотя суеверия очень вредят человеку, мешают правильно понимать законы природы, подавляют веру в свои силы, всё же некоторые люди верят в магическую силу отдельных чисел. Например, они связывают неудачу с числом 13 и называют его чёртовой дюжиной. Откуда пришло это суеверие?

Число 12, в народе называемое *дюжиной*, у многих людей в разные времена пользовалось особой любовью и было положено в основу *двенадцатеричной системы счисления*. Число 12 имеет много делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 12, что в практике важно. Поэтому число 12 всегда считалось хорошим, удобным. Христианская религия числу 12 придаёт особое значение: в Библии говорится о 12 избранных племенах, 12 апостолах и др.

Следующее же за ним простое число 13 (не имеющее делителей, кроме 1 и себя) считалось нехорошим, неудобным. В некоторых англоязычных странах на улицах ряда городов отсутствуют дома с этим номером, а в домах — квартиры № 13.

На Руси пользовалось особым вниманием число 7. Когда зарождался счёт, число 7 ассоциировалось с большим количеством. Поэтому появились пословицы и поговорки, которые живут по сей день: «Семь раз отмерь, а один раз отрежь!»; «Семеро одного не ждут!»; «Один с сошкой, а семеро с ложкой!»; «Седьмая вода на киселе» (говорят о дальнем родстве).

§ 2 Алгебраические выражения

В этом параграфе разъясняется, что под буквами в алгебре подразумеваются числа, при этом в одном выражении одной буквой обозначают одно и то же число.

Нужно вспомнить:

- понятия числового выражения и его значения;
- действия с целыми и дробными числами;
- единицы измерения времени, длины, площади, массы.

Задача 1. Задумайте какое-нибудь число, умножьте его на 3, к полученному результату прибавьте 6, найденную сумму разделите на 3 и вычтите задуманное число. Какое число получилось?

► Пусть задумано число 8. Выполним все действия в том порядке, как это указано в условии:

1) $8 \cdot 3 = 24$; 2) $24 + 6 = 30$; 3) $30 : 3 = 10$; 4) $10 - 8 = 2$.

Получилось число 2. Это решение можно записать в виде числового выражения $(8 \cdot 3 + 6) : 3 - 8$, значение которого равно 2. Если было задумано число 5, то получилось бы числовое выражение $(5 \cdot 3 + 6) : 3 - 5$, значение которого также равно 2. Возникает догадка о том, что, какое бы число мы ни задумали, в результате получится число 2. Проверим это. Обозначим задуманное число буквой a и запишем действия в том порядке, как указано в условии: $(a \cdot 3 + 6) : 3 - a$.

Используя известные свойства арифметических действий, упростим это выражение:

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a = a + 2 - a = 2. \triangleleft$$

При решении задачи было получено выражение $(a \cdot 3 + 6) : 3 - a$, которое записано с помощью буквы a, обозначающей любое число, чисел 3 и 6, знаков действий и скобок.

Это пример **алгебраического выражения**. Приведём ещё примеры алгебраических выражений:

$$2 \cdot (m + n), \quad 3 \cdot a + 2 \cdot a \cdot b - 7, \quad (a + b) \cdot (a - b), \quad \frac{x + y}{a}.$$

Для сокращения записи знак умножения (точка) часто опускается. Например, вместо

$$2 \cdot a + 3 \cdot (x - y) \cdot (x + y)$$

пишут

$$2a + 3(x - y)(x + y).$$

Если вместо каждой буквы, входящей в алгебраическое выражение, подставить некоторое числовое значение и выполнить действия, то полученное в результате число называют **значением алгебраического выражения.**

Например, значение алгебраического выражения $3a + 2b - 7$ при $a = 2$, $b = 3$ равно 5, так как $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 7 = 5$; значение этого же выражения при $a = 1$, $b = 0$ равно -4, так как $3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 7 = -4$. Значение алгебраического выражения $(a \cdot 3 + 6) : 3 - a$ равно 2 при любом значении a.

Задача 2. Найти значение алгебраического выражения $\frac{(3a+7)b}{a-b}$ при $a=10$, $b=5$.

► $\frac{(3\cdot 10+7)\cdot 5}{10-5}=\frac{37\cdot 5}{5}=37.$ ◁

Устные вопросы и задания

1. Что в алгебре подразумевают под буквами?
2. Какое выражение называют алгебраическим?
3. Привести примеры числовых и алгебраических выражений.
4. Что называют значением алгебраического выражения?

Вводные упражнения

1. Найти:
   1) половину числа 7; 0,6; $\frac{1}{2}$;
   2) удвоенную разность чисел 40 и 15;
   3) число, в 3 раза большее суммы чисел 1 и 2;
   4) число, в 5 раз меньшее разности чисел 32 и 12;
   5) квадрат суммы чисел 3 и 4;
   6) сумму квадратов чисел 5 и 3.
2. Найти число секунд в часе; в сутках.
3. Найти число граммов в центнере; в тонне.
4. Найти 48% от числа 200.
5. Найти число, 35% которого равны 140.

Упражнения

11. Записать:
1) удвоенную сумму чисел 5 и m;
2) половину разности чисел c и d;
3) сумму числа 12 и произведения чисел a и b;
4) частное от деления суммы чисел n и m на число 17.

12. Найти значение алгебраического выражения:
1) $3a-2b$ при $a=\frac{1}{3}$, $b=1$; $a=0{,}01$, $b=\frac{1}{4}$;
2) $2a+3b$ при $a=3$, $b=-2$; $a=-1{,}4$, $b=-3{,}1$;
3) $0{,}25a-4c^2$ при $a=4$, $c=3$; $a=0{,}1$, $c=\frac{1}{2}$;
4) $2a^2-\frac{1}{3}b$ при $a=2$, $b=9$; $a=\frac{1}{4}$, $b=2{,}4$.

13. Сколько минут: 1) в 7 ч 30 с; 2) в m часах; 3) в p секундах; 4) в m часах, l минутах и p секундах?

14. Найти значение выражения:

1) $\dfrac{5(bc+m)}{2q+4\frac{1}{4}}$ при $b=\dfrac{2}{3}$, $c=6$, $q=\dfrac{1}{2}$, $m=\dfrac{1}{5}$;

2) $\dfrac{3(x-y)}{2p+q}-1$ при $x=8{,}31$, $y=2{,}29$, $p=2{,}01$, $q=2$.

15. Записать:

1) 66% от суммы чисел a и 4,02;

2) 33% от частного чисел x и 0,27.

16. Найти значение алгебраического выражения:

1) $\dfrac{\frac{1}{2}a+0{,}4:b-4{,}4}{3{,}5a-4b+8{,}2}$ при $a=1$, $b=2$; $a=0$, $b=1$;

2) $\dfrac{ab+\frac{1}{4}(a+b)}{6a-b+3}$ при $a=1$, $b=-1$; $a=-2$, $b=1$.

17. Может ли при каком-либо значении a быть равным нулю значение алгебраического выражения:

1) $a+999\,999$; 2) $\dfrac{3}{a-5}$; 3) $\dfrac{a-1}{47+a}$; 4) a^2+1?

18. Число содержит 4 сотни, b десятков и c единиц. При каких значениях b и c данное число кратно тридцати?

Диалог об истории

Как и зачем пришли в математику буквы?

Вы уже поняли, что с помощью алгебраических выражений можно описывать в общем виде реальные процессы, закономерности геометрии и физики.

Ещё древние вавилоняне, египтяне, греки и китайцы применяли отдельные алгебраические символы. Букву как обозначение неизвестной величины ввёл Диофант. То, что мы обозначили бы буквой x, он обозначал ς (греческая буква «сигма концевая»). Диофант записывал числовые множители (коэффициенты) не перед буквой, а после неё. Если в выражении присутствовало числовое слагаемое, то он ставил перед ним значок «$\overset{\circ}{\text{M}}$» — фактически первые две буквы слова Μονας (монос — единица).

А как Диофант записал бы выражение $2x-3$?

Он записал бы его так: $\varsigma\overline{\beta}\pitchfork\mathring{M}\overline{\gamma}$. Вспомните о том, что знак «$\pitchfork$» у Диофанта обозначал «минус», $\overline{\beta}$ — число 2, $\overline{\gamma}$ — число 3. Но я хотел бы продолжить свой рассказ.

ал-Хорезми

Труды таких известных учёных, как *ал-Хорезми (VIII—IX вв.), Омар Хайям (ок. 1048 — после 1122), ал-Каши (XIV—XV вв.)* и др., способствовали развитию алгебры. Однако в этих трудах отсутствовали символы: решения всех задач с вычислениями записывались полностью словами. Похожей на эту *риторическую* алгебру была наука и в Европе.

Как вам известно, в XV в. изобрели *книгопечатание*. Процесс печатания книги был трудоёмким, и, скорее всего, он подтолкнул учёных к сокращению объёма своих записей, а значит, и к введению символов.

Франсуа Виет

Буквенную символику, похожую на ту, которой сегодня пользуются в алгебре, ввёл известный французский математик *Франсуа Виет (1540—1603)*. За это его часто называют отцом алгебры.

Профессор, а Вы знаете, какими людьми были учёные, чьи имена Вы упоминаете? Они занимались только наукой или у них были ещё какие-то интересы? Какими они были в детстве?

Конечно, интересней и понятней становится результат деятельности человека, если знаешь, как и зачем он это сделал. Сейчас немного расскажу вам об одном из упомянутых мною учёных — о Виете.

По образованию Виет был юристом. В молодости он заинтересовался астрономией после того, как узнал теорию *Николая Коперника (1473—1543)* организации Вселенной. Он решил написать *трактат по астрономии*, а для этого ему пришлось всерьёз заняться алгеброй и другими разделами математики. Астрономический трактат Виет так и не дописал, зато его алгебраические труды, которыми он занимался ради астрономии, оказали существенное влияние на развитие алгебры. Виет был советником королей Генриха III и Генриха IV. Первому из них Виет помог расшифровать переписку его врагов (шифр был сложным, состоял из 500 знаков). А самое интересное состоит в том, что всю свою жизнь, несмотря на серьёзные научные изыскания, Виет успешно занимался адвокатской деятельностью и этим зарабатывал себе на жизнь.

§ 3 Алгебраические равенства. Формулы

Буквенные обозначения величин используются в науке и, соответственно, в школьных предметах: в геометрии, физике, химии, информатике. С помощью букв записывают обобщённые выражения числовых характеристик и в гуманитарных знаниях. Например, выражение $2010+12n$, где n — натуральное число, позволяет определить все предстоящие годы Тигра по китайскому календарю.
В этом параграфе будут разобраны примеры использования алгебраических выражений для записи алгебраических равенств, уравнений и формул. Вы поймёте, почему буквы в алгебраических выражениях не всегда могут принимать любые значения.

Нужно вспомнить:

- понятия чётного и нечётного чисел;
- понятие многоугольника;
- формулы площади и периметра прямоугольника;
- алгоритмы нахождения неизвестных компонентов арифметических действий.

При решении многих практических задач часто для обозначения чисел используются буквы. Например, если a и b — длины сторон прямоугольника, измеренные одной и той же единицей длины (например, в сантиметрах), то ab — его площадь, $2(a+b)$ — его периметр. Обозначим площадь прямоугольника буквой S, а периметр — буквой P, тогда получим **формулы** $S=ab$, $P=2(a+b)$. Если длины сторон измерены в сантиметрах, то S — число квадратных сантиметров, а P — число сантиметров.

Буквами обозначают также неизвестные числа в уравнениях. Например, в уравнении $x+12{,}3=95{,}1$ неизвестное число обозначено буквой x, а в уравнении $2y+3=7$ — буквой y. С помощью букв удобно записывать свойства арифметических действий. Например:

$$a-(b+c)=(a-b)-c=a-b-c, \tag{1}$$

$$(a+b):c=a:c+b:c. \tag{2}$$

В алгебре одна и та же буква может принимать различные числовые значения. Так, в равенстве (1) a, b, c — любые числа; в равенстве (2) a и b — любые числа, а c — любое число, кроме нуля.

Два алгебраических выражения, соединённые знаком «=», образуют **алгебраическое равенство**.

С помощью букв можно записать **формулы чётного и нечётного натуральных чисел**. Если a — чётное число, то оно делится на 2 и его записывают так:

$$a=2n,$$

где n — натуральное число. По этой формуле можно найти, например, шестое (по порядку следования в ряду натуральных чисел) чётное число: при $n=6$ число $a=2\cdot 6=12$.

Любому чётному числу предшествует число нечётное, поэтому формула нечётного числа имеет вид:

$$b=2n-1,$$

где n — натуральное число. Например, тридцатое нечётное натуральное число равно $2\cdot 30-1=59$.

Формулу нечётного натурального числа можно записать и так: $b=2k+1$, где k — натуральное число или нуль.

Использование букв позволяет записать ход решения многих задач одного и того же типа.

Задача 1. Поле имело форму прямоугольника, длина которого равна a километрам, ширина — b километрам. После осушения болота площадь поля увеличилась на 0,88 км^2. Какой стала площадь поля? Провести вычисления для:

1) $a=2{,}2$ и $b=0{,}8$; 2) $a=1{,}4$ и $b=4{,}3$.

► До осушения болота площадь поля была равна ab км^2, после осушения она стала равна $(ab+0{,}88)$ км^2.

1) При $a=2{,}2$ и $b=0{,}8$ получаем $2{,}2\cdot 0{,}8+0{,}88=2{,}64$.

2) При $a=1{,}4$ и $b=4{,}3$ получаем $1{,}4\cdot 4{,}3+0{,}88=6{,}9$. ◁

Задача 2. Турист вышел из посёлка и направился в город. Пройдя 6 км, он сел в автобус и за t часов доехал до города.

1) Найти расстояние s (в км) между посёлком и городом, если автобус двигался со скоростью v (в км/ч).

2) Из полученной формулы выразить t через s и v.

► 1) За t часов турист проехал на автобусе vt километров. Поэтому расстояние между посёлком и городом выражается формулой $s=6+vt$.

2) Из формулы $s=6+vt$ находим $vt=s-6$. Так как $v\neq 0$, то $t=\frac{s-6}{v}$. ◁

Условимся в дальнейшем при делении на алгебраическое выражение считать, что его значение не равно 0, так как деление на 0 невозможно.

Шаг вперёд

Изучаемый в этой главе материал (запись формул, преобразование алгебраических выражений, раскрытие скобок) позволяет ставить и решать непростые и интересные задачи. Рассмотрим задачи, связанные с делимостью чисел.

Натуральное число N делится нацело на натуральное число k, если число N можно представить в виде $N = k \cdot p$ (где p — натуральное число). Например, число $N = 72$ делится на $k = 3$, так как $72 = 3 \cdot 24$; число 60 делится на 12, так как $60 = 12 \cdot 5$.

Докажем, что сумма любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 3.

● Пусть первое из трёх последовательных натуральных чисел равно n, тогда следующее за ним число равно $n + 1$, а третье число равно $n + 2$. Сумма трёх этих чисел равна $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1) = 3p$, где $p = n + 1$. Так как сумма трёх последовательных натуральных чисел представима в виде $3p$, значит, она делится на 3, что и требовалось доказать. ○

Для того чтобы доказать верность некоторого утверждения для всех чисел, нужно строго (ссылаясь на известные правила, свойства и определения) обосновать его истинность. Так было сделано только что при доказательстве делимости суммы чисел на 3. А для того чтобы опровергнуть некоторое утверждение, достаточно найти хотя бы один пример (его называют **контрпримером**), не удовлетворяющий этому утверждению.

Рассмотрим утверждение: «Произведение любых двух натуральных чисел есть число чётное». Оно неверно, так как, например, произведение чисел 3 и 5 не является чётным числом.

Устные вопросы и задания

1. По каким формулам вычисляют: 1) площадь прямоугольника; квадрата; 2) периметр прямоугольника; квадрата?
2. Какое число называется чётным; нечётным?
3. Привести формулы чётного и нечётного чисел.
4. Установить, какие из чисел 379, 548, 2646, 967 являются чётными, а какие нечётными.
5. Какие значения может принимать m в равенстве $\frac{2}{m+1} = 3m$?

Вводные упражнения

1. Найти значение выражения $5a - b$, если:
   1) $a = 0{,}4$, $b = 6$; 2) $a = -0{,}6$, $b = 7$.
2. Найти значение A по формуле $A = 2x - 3y$, если:
   1) $x = -0{,}5$, $y = 1$; 2) $x = 4$, $y = -3$.

3. Найти периметр и площадь прямоугольника со сторонами a и b, если: 1) $a=0,5$ м, $b=20$ см; 2) $a=6$ дм, $b=1,2$ м.

Упражнения

19. Куплено 6 папок по цене x рублей и 3 пачки бумаги по цене y рублей. Написать формулу стоимости p всей покупки.

20. В магазин привезли 15 ящиков слив по a килограммов в каждом и 20 ящиков яблок по b килограммов в каждом. Написать формулу массы m привезённого товара.

21. На машину погрузили a мешков пшеницы по l килограммов в каждом и c мешков овса по n килограммов в каждом. Написать формулу массы m зерна на машине.

22. В кинотеатре m рядов по n мест в каждом и ещё k откидных мест. Сколько мест в кинотеатре? Составить выражение для решения задачи и провести вычисления при $m=30$, $n=25$, $k=60$.

23. Сколько времени проводит ученик в школе в тот день, когда у него a уроков по 45 мин, b перемен по 15 мин и c перемен по 10 мин? Составить выражение для решения этой задачи.

24. Указать, какие числовые значения могут принимать буквы a и b в алгебраических выражениях:

1) $\frac{a-b}{2}$; 2) $\frac{a-2}{b}$; 3) $\frac{b}{a-2}$; 4) $\frac{2}{a-b}$.

25. Найти в ряду натуральных чисел:

1) 10-е; 99-е чётное число; 2) 12-е; 77-е нечётное число.

26. Геологи ехали верхом на лошадях 3 ч 10 мин со скоростью c километров в час, затем плыли на плоту 1 ч 40 мин по реке, скорость течения которой a километров в час, и, наконец, шли пешком 2 ч 30 мин со скоростью b километров в час. Написать формулу пути, обозначив длину маршрута (в км) буквой s. Вычислить длину маршрута при $a=3,3$ км/ч, $b=5,7$ км/ч, $c=10,5$ км/ч.

27. Автобус преодолевает путь s километров за t часов. С какой скоростью должен ехать автомобиль, чтобы тот же путь преодолеть на 1 ч быстрее автобуса?

28. Верно ли утверждение:

1) произведение двух любых чётных чисел делится на 4;

2) одно из двух последовательных чётных чисел делится на 6?

29. 1) Из формулы $C=2\pi R$ выразить R через C и π.

2) Из формулы $s=vt+l$ выразить:

а) l через s, v и t; б) v через s, t и l; в) t через s, v и l.

3) Из формулы $V=\frac{m}{\rho}$ выразить:

а) ρ через V и m; б) m через V и ρ.

30. Школьники сажали деревья. Первая группа посадила a деревьев, вторая — 80% того, что посадила первая, а третья — на 5 деревьев больше второй. Сколько деревьев посадили школьники?

31. Турист вышел из пункта A и прошёл 7 км за $1\frac{3}{4}$ ч, затем сделал привал на 15 мин, после чего прошёл оставшиеся 10,5 км за 3 ч. На каком расстоянии от пункта A находился турист через a часов, где $2 < a < 5$?

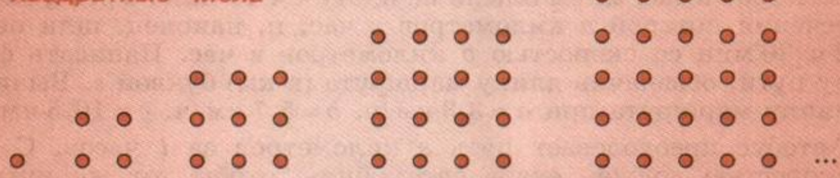
Диалог об истории

Геометрия помогает алгебре

В начале главы мы вспомнили немало формул, знакомых вам ещё из курса математики 6 класса. Учёные с древних времён наблюдали за взаимосвязями различных величин и пытались описывать эти связи формулами. Та формула, с которой я хочу вас познакомить, требует предварительного рассказа о тесной связи алгебры, арифметики и геометрии.

В Древней Греции ученики *Пифагора (ок. 570 г. до н. э. — ок. 500 г. до н. э.)* не только занимались геометрией, но и развивали учение о числе с помощью геометрических фигур. Числа они изображали в виде точек (иногда выкладывали их камешками), группируя их в разные фигуры. Так появились *квадратные числа*: 1, 4, 9, 16, 25, ... На рисунке они изображены камешками, выложенными в форме квадратов. При этом число N всех камешков n-го по порядку квадратного числа находится по формуле $N = n^2$, где n — число камешков на одной стороне квадрата.

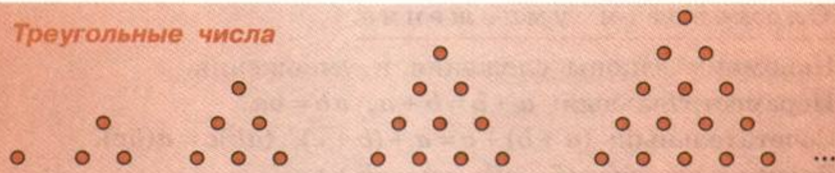
Квадратные числа



Значит, у древних греков были и другие «многоугольные» числа?

Ты права. Были, например, *треугольные числа*: 1, 3, 6, 10, 15, ... На рисунке они изображены камешками, выложенными в форме треугольников. Формула числа камешков N в n-м по порядку треугольном числе имеет вид $N = \frac{n(n+1)}{2}$.

Треугольные числа



Значит, я легко могу найти, например, сотое по порядку треугольное число. Подсчитаю: $N = \frac{100 \cdot (100+1)}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$.

И другие фигурные числа составляли учёные. Геометрическое представление чисел помогало греческим учёным, таким, как *Эратосфен (ок. 276 г. до н. э. — 194 г. до н. э.)*, Диофант и др., изучать свойства чисел. Например, Диофант нашёл формулу, связывающую треугольные и квадратные числа: если обозначить некоторое треугольное число буквой T, то число $8T+1$ обязательно будет некоторым квадратным числом. Например, умножая четвёртое треугольное число $T=10$ на 8 и прибавляя 1, получим 81, что является девятым квадратным числом ($81=9^2$). Справедливость формулы Диофанта $8T+1=k$, где k — некоторое квадратное число, проверьте самостоятельно на первых 10 треугольных числах.

§ 4 Свойства арифметических действий

Чтобы успешно изучать алгебру, нужно знать свойства арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления). В этом параграфе будут обобщены ранее изученные свойства действий с числами и показаны способы их применения для рациональных вычислений и упрощения выражений. Будут сформулированы новые свойства арифметических действий.

Нужно вспомнить:

- какие числа называют противоположными;
- какие числа называют взаимно обратными.

Словесные формулировки свойств действий над числами будем коротко записывать в виде формул. Основные свойства действий обычно называют *законами*, используя которые можно обосновать и другие свойства действий.

1. Сложение и умножение.

Напомним законы сложения и умножения.

- **Переместительный:** $a+b=b+a$, $ab=ba$.
- **Сочетательный:** $(a+b)+c=a+(b+c)$, $(ab)c=a(bc)$.
- **Распределительный:** $a(b+c)=ab+ac$.

В этих равенствах a, b, c — любые числа. Например:

$$1{,}2+3{,}5=3{,}5+1{,}2; \qquad \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)=\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{3}{4};$$

$$(-8)\cdot(125+7)=(-8)\cdot 125+(-8)\cdot 7.$$

С помощью перечисленных законов можно получить другие свойства этих действий. Например:

$$a+b+c+d=a+(b+c+d), \qquad (abc)d=(ab)(cd),$$
$$(a+b+c)d=ad+bd+cd.$$

Задача 1. Вычислить $75+37+25+13$.

► Вычисления можно провести, следуя указанному порядку действий: сложить 75 и 37, к результату прибавить 25 и к последнему результату прибавить 13. Однако вычисления можно упростить, если воспользоваться свойствами сложения: $75+37+25+13=(75+25)+(37+13)=100+50=150$. ◁

Этот пример показывает, что с помощью свойств действий можно проводить вычисления наиболее простым (рациональным) способом. Свойства действий применяются также для преобразования алгебраических выражений с целью их упрощения.

Задача 2. Упростить выражение $3(2a+4b)+5(7a+b)$.

► $3(2a+4b)+5(7a+b)=3\cdot 2a+3\cdot 4b+5\cdot 7a+5\cdot b=$
$=6a+12b+35a+5b=(6a+35a)+(12b+5b)=$
$=(6+35)a+(12+5)b=41a+17b$. ◁

При решении задачи получилось выражение $6a+12b+35a+5b$. В этом выражении слагаемые $6a$ и $35a$ **подобны**, так как они отличаются друг от друга только коэффициентами. Слагаемые $12b$ и $5b$ также подобны. Поэтому можно было записать вместо этого выражения выражение $41a+17b$, т. е. **привести подобные слагаемые**. Знание свойств арифметических действий существенно упростило исходное выражение, после преобразований получилось $41a+17b$. Записи преобразований можно делать краткими, выполняя промежуточные вычисления устно. Например:

$$6(3x+4)+2(x+1)=18x+24+2x+2=20x+26.$$

2. Вычитание.

Задача 3. На пути из Москвы в Санкт-Петербург расположен город Тверь. Расстояние между Москвой и Санкт-Петербургом равно 650 км, а между Москвой и Тверью — 167 км. Найти расстояние между Тверью и Санкт-Петербургом.

► Пусть расстояние между Тверью и Санкт-Петербургом x километров. Тогда $167+x=650$, откуда $x=650-167=483$ (км). ◁

Из равенства $167+x=650$ число x находится с помощью действия вычитания, которое называют обратным к действию сложения.

Вычитание можно заменить сложением с противоположным числом: $a-b=a+(-b)$.

Поэтому свойства вычитания можно обосновать свойствами сложения. Например:

$123-(23+39)=123-23-39=61;$	$a-(b+c)=a-b-c;$
$123-(83-77)=123-83+77=117;$	$a-(b-c)=a-b+c.$

Задача 4. Найти значение выражения $4(3x-5y)+6(x-y)$ при $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{13}$.

► Сначала упростим данное выражение:

$$4(3x-5y)+6(x-y)=12x-20y+6x-6y=18x-26y.$$

При $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{13}$ получаем $18\cdot\frac{1}{2}-26\cdot\frac{1}{13}=9-2=7.$ ◁

Таким образом, использование свойств действий позволяет предварительно упростить алгебраическое выражение, а затем вычислить его значение более рациональным способом.

3. Деление.

Задача 5. Площадь прямоугольника равна 380 см^2, одна из его сторон равна 95 см. Найти другую сторону прямоугольника.

► Из формулы $S=ab$ находим $b=\frac{S}{a}$. Так как $S=380$, $a=95$, то $b=\frac{380}{95}=4$ (см). ◁

Из равенства $ab=S$ число b находится с помощью действия деления, которое называют обратным к действию умножения.

Деление можно заменить умножением на число, обратное делителю: $\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$.

Поэтому свойства деления можно вывести из свойств умножения. Покажем, как можно доказать *распределительное свойство деления* (относительно сложения).

Задача 6. Доказать равенство $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$, где $c \neq 0$.

▶ Заменяя деление умножением, получаем $\frac{a+b}{c}=(a+b)\cdot\frac{1}{c}$. Применяя распределительный закон, находим

$$(a+b)\cdot\frac{1}{c}=a\cdot\frac{1}{c}+b\cdot\frac{1}{c}.$$

Заменяя умножение делением, получаем $a\cdot\frac{1}{c}+b\cdot\frac{1}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$. ◁

Устные вопросы и задания

1. Сформулировать три основных закона сложения и умножения.
2. Назвать законы, с помощью которых упростится нахождение значения выражения:
   1) $24{,}3+5\frac{5}{9}+0{,}7$; 2) $\frac{2}{3}\cdot 1{,}6+1{,}4\cdot\frac{2}{3}$.
3. Какие слагаемые называются подобными? Привести пример выражения, содержащего слагаемое, подобное $12a$.

Вводные упражнения

1. Вычислить:
   1) $3\frac{5}{12}-1\frac{17}{18}$; 2) $5\frac{1}{2}\cdot\left|-3\frac{1}{22}\right|$; 3) $\left|-1\frac{2}{3}\right|\cdot(-0{,}4)$;
   4) $6\frac{2}{7}:\frac{11}{14}$; 5) $7\frac{2}{5}:0{,}2$; 6) $1{,}3\cdot\frac{5}{6}$.
2. Найти: 1) 20% от числа 250; 2) число, если 15% его равны 60.

Упражнения

32. Найти значение числового выражения, используя законы и свойства арифметических действий:
1) $29\cdot 0{,}45+0{,}45\cdot 11$; 2) $(51{,}8+44{,}3+48{,}2-24{,}3)\cdot\frac{1}{3}$;
3) $4{,}07-5{,}49+8{,}93-1{,}51$; 4) $-11{,}401-23{,}17+4{,}401-10{,}83$.

Привести подобные слагаемые **(33—34)**:

33. 1) $4a+2b+a-b$; 2) $x-2y-3x+5y$;
3) $0{,}1c-0{,}3+d-c-2{,}1d$; 4) $8{,}7-2m+n-\frac{1}{3}m+\frac{2}{3}n$.

34. 1) $2{,}3a-0{,}7a+3{,}6a-1$; 2) $0{,}48b+3+0{,}52b-3{,}7b$;

3) $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}a-\frac{5}{6}a+2$; 4) $\frac{5}{6}y-\frac{1}{3}b-\frac{1}{6}y+\frac{2}{3}b-3$;

5) $2{,}1m+n-3{,}2m+2n+1{,}1m-n$;

6) $5{,}7p-2{,}7q+0{,}3p+0{,}8q+1{,}9q-p$.

35. Упростить выражение:

1) $3(2x+1)+5(1+3x)$; 2) $4(2+x)-3(1+x)$;

3) $10(n+m)-4(2m+7n)$; 4) $11(5c+d)+3(d+c)$.

36. Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $5(3x-7)+2(1-x)$ при $x=\frac{1}{26}$;

2) $7(10-x)+3(2x-1)$ при $x=-0{,}048$;

3) $\frac{1}{3}(6x-3)+\frac{2}{5}(5x-15)$ при $x=3{,}01$;

4) $0{,}01(2{,}2x-0{,}1)+0{,}1(x-100)$ при $x=-10$.

37. Используя свойства арифметических действий, вычислить:

1) $\frac{1}{7}(0{,}14+2{,}1-3{,}5)$; 2) $\frac{1}{12}(4{,}8-0{,}24-1{,}2)$;

3) $\left(18\frac{6}{7}+21\frac{3}{4}\right):3$; 4) $\left(15\frac{5}{7}+20\frac{15}{16}\right)\cdot\frac{1}{5}$.

38. Упростить выражение:

1) $1{,}2a-(0{,}2a+b)$; 2) $0{,}7x-(2y-0{,}7x)$;

3) $0{,}1(x-2y)+0{,}2(x+y)$; 4) $\frac{2}{3}(m-3n)+\frac{1}{3}(n-2m)$;

5) $8(a+3b)-9(a+b)$; 6) $3(c+d)-7(d+2c)$.

39. Доказать, что:

1) удвоенная сумма чисел $3a$ и $7b$ равна одной трети суммы чисел $18a$ и $42b$;

2) число, противоположное разности чисел $0{,}2y$ и $0{,}3x$, равно одной десятой разности чисел $3x$ и $2y$.

40. Сколько десятичных знаков после запятой содержит:

1) сумма чисел $0{,}048$ и $3{,}17$;

2) разность чисел $2{,}0017$ и $5{,}01$;

3) $\frac{1}{10}$ суммы чисел $44{,}95$ и $0{,}045$;

4) $\frac{1}{100}$ разности чисел 1048 и 945?

41. Три группы учащихся собирали фрукты. Первая группа собрала 80% того, что собрала вторая группа, а третья группа собрала 50% того, что собрали первые две группы. Какая группа собрала больше фруктов?

Диалог об истории

Как геометрией доказывали алгебру

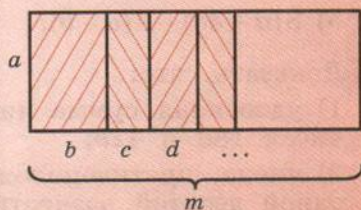
На уроках геометрии вы не раз услышите имя величайшего древнегреческого учёного *Евклида (330 г. до н. э. — 260 г. до н. э.)*, который жил в Александрии. В 13 книгах, которые Евклид назвал «Начала», он обобщил и привёл в систему накопленные до него геометрические знания. Используя труды своих предшественников (Пифагора, Фалеса, Гиппократа, Евдокса), Евклид сделал так много открытий, что его «Начала» служили более 2000 лет основным пособием по геометрии.

Евклид

Профессор, а почему на занятиях алгеброй Вы так много говорите о геометрии?

А ты не забыла, что алгебра и геометрия помогали друг другу развиваться? Первоначально алгебра многие свои обоснования проводила с помощью геометрии. Например, в VII книге «Начал» Евклида с помощью геометрических понятий доказаны небезызвестные вам *переместительный закон* умножения $ab = ba$ и *распределительный закон* в общем виде: $a(b + c + d + \ldots) = ab + ac + ad + \ldots$.

Распределительный закон у Евклида формулируется на «геометрическом языке» примерно так: «Если из двух отрезков a и m один (m) рассечён на сколь угодно частей (b, c, d, ...), то прямоугольник am, заключённый между этими отрезками, равен сумме прямоугольников ab, ac, ad, ..., заключённых между нерассечённым отрезком a и каждой из частей другого отрезка m».



Я поняла: Евклид прямоугольниками am, ab и т. д. называл площади соответствующих прямоугольников!

Умница! Именно в этом и есть наглядная суть доказательства распределительного закона. Думаю, нетрудно сообразить, как Евклид доказывал, например, переместительный закон умножения. А строгое доказательство законов арифметических действий было сделано лишь во второй половине XIX в. В это же время были введены в алгебру термины «коммутативный» (от латинского *commutare* — менять, перемещать) и «дистрибутивный» (от латинского *distributus* — разделённый, распределительный).

Коммуникативным назвали переместительный закон, а дистрибутивным — распределительный?

Абсолютно верно. Расскажу любопытный факт. В одной из старинных книг по геометрии описывается «чудесное» свойство треугольника. Предлагают около вершин треугольника записать произвольные числа, например числа 2, 6 и 7. Затем сложить эти числа попарно и результаты поставить на сторонах, соединяющих вершины, около которых стоят эти числа. Складывая затем число при каждой вершине с числом на противолежащей стороне, получают один и тот же результат $(2+13=7+8=6+9=15)$.

Нетрудно показать, что речь идёт не о «таинственном» свойстве треугольника, а о сочетательном и переместительном законах сложения: $2+(6+7)=7+(2+6)=6+(2+7)=2+6+7=15$. В общем виде можно записать так:

$$a+(b+c)=b+(c+a)=c+(a+b)=a+b+c.$$

§ 5 Правила раскрытия скобок

Скобки в числовом выражении указывают на порядок выполнения действий. Однако для упрощения вычислений часто пользуются приёмами, позволяющими записать заданное выражение, содержащее скобки, без скобок. Таким образом можно, например, записать свойство вычитания суммы из числа: $a-(b+c)=a-b-c$.

Знание способов раскрытия скобок часто позволяет упрощать выражение (и облегчает тем самым при необходимости нахождение его числового значения). Например: $a-(a+b)=a-a-b=$ $=-b$. Очевидно, что выражение $-b$ проще, чем выражение $a-(a+b)$. Значит, умение раскрывать скобки — полезное действие. Ему вы и научитесь в этом параграфе, предварительно узнав, что такое алгебраическая сумма.

Нужно вспомнить:

- действия с числами с одинаковыми и с разными знаками;
- свойства сложения и вычитания;
- понятия алгебраического выражения и значения алгебраического выражения.

1. Алгебраическая сумма.

Задача 1. В двадцатиэтажном здании движется лифт. С восьмого этажа он передвинулся на 6 этажей вниз, затем на 12 этажей вверх, на 4 этажа вниз, на 7 этажей вверх, на 13 этажей вниз. На каком этаже находится лифт?

► Чтобы найти, на каком этаже находится лифт, нужно вычислить значение числового выражения $8-6+12-4+7-13$. Это значение равно 4.

Ответ. Лифт находится на четвёртом этаже. ◁

Выражение $8-6+12-4+7-13$ называют **алгебраической суммой.** Такое название объясняется тем, что это выражение можно записать в виде суммы $8+(-6)+12+(-4)+7+(-13)$.

Приведём ещё примеры алгебраических сумм:

$$3-(-7)+(-2), \qquad 2a-7b+c-d, \qquad a+(-b)-(-c).$$

! **Алгебраическая сумма** — это запись, состоящая из нескольких алгебраических выражений, соединённых знаками «+» или «–».

Заменяя вычитание сложением, алгебраическую сумму $a+(-b)-(-c)$ можно записать по-другому: $a+(-b)-(-c)=a+(-b)+c$.

Обычно алгебраические суммы вида $3-(-7)+(-2)$, $a+(-b)-(-c)$ записывают короче так:

$$3-(-7)+(-2)=3+7-2; \qquad a+(-b)-(-c)=a-b+c.$$

В алгебраической сумме $3+7-2$ слагаемыми являются числа 3, 7 и -2, так как $3+7-2=3+7+(-2)$; в алгебраической сумме $a-b+c$ слагаемыми являются a, $-b$, c, так как $a-b+c=a+(-b)+c$; в алгебраической сумме $2a-7b-c$ слагаемыми являются $2a$, $-7b$, $-c$.

2. Раскрытие скобок и заключение в скобки.

Преобразование выражений, содержащих скобки, перед которыми стоит знак «+», основывается на следующих свойствах сложения:

$$a+(b+c)=a+b+c, \qquad a+(b-c)=a+b-c.$$

Эти равенства позволяют сформулировать **первое правило раскрытия скобок.**

Если к алгебраическому выражению прибавляется алгебраическая сумма, заключённая в скобки, то знак «+» перед скобками и скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы.

Например:

$$14+(7-13+2)=14+7-13+2;$$
$$a+(b+c-d)=a+b+c-d; \qquad (a-b)+c=a-b+c.$$

Преобразование выражений, содержащих скобки, перед которыми стоит знак «–», основывается на следующих свойствах вычитания:

$$b-(-a)=b+a, \qquad a-(b+c)=a-b-c, \qquad a-(b-c)=a-b+c.$$

Из этих равенств следует **второе правило раскрытия скобок.**

Если из алгебраического выражения вычитается алгебраическая сумма, заключённая в скобки, то знак «–» перед скобками и скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы на противоположный.

Например:

$$14-(7-13+2)=14-7+13-2;$$
$$a-(b+c-d)=a-b-c+d; \qquad -(a-b)+c=-a+b+c.$$

Задача 2. Раскрыть скобки и упростить выражение

$$3x+(5-(8x+3)).$$

► $3x+(5-(8x+3))=3x+5-(8x+3)=3x+5-8x-3=2-5x.$ ◁

Иногда полезно заключить несколько слагаемых в скобки. Например:

$$108-137+37=108-(137-37)=108-100=8;$$
$$a+b-c+d=a+(b-c+d); \qquad a-b-c+d=a-(b+c-d).$$

Если перед скобками ставится знак «+», то знаки всех слагаемых, заключаемых в скобки, сохраняются.

Если перед скобками ставится знак «–», то знаки всех слагаемых, заключаемых в скобки, меняются на противоположные.

Устные вопросы и задания

1. Что называют алгебраической суммой?
2. Сформулировать первое и второе правила раскрытия скобок.
3. Сформулировать правила заключения в скобки алгебраической суммы, если перед скобками ставится знак «+»; знак «–».

Вводные упражнения

1. Вычислить: 1) $-10+3-2$; 2) $15-18-4$; 3) $-23-18-14+18$.

2. Найти значение числового выражения:
1) $27-(3-(8+(6-7)))-12$; 2) $16+(-6-(18+(4-9)-2)+1)$.

Упражнения

42. Вычислить, используя свойства арифметических действий:
1) $4{,}385+(0{,}407+5{,}615)$; 2) $7\frac{7}{8}+\left(\frac{13}{18}-3\frac{7}{8}\right)$;
3) $0{,}213-(5{,}8+3{,}413)$; 4) $10\frac{4}{17}-\left(3\frac{4}{9}-1\frac{13}{17}\right)$.

Раскрыть скобки **(43—44)**.

43. 1) $a+(2b-3c)$; 2) $a-(2b-3c)$;
3) $a-(2b+3c)$; 4) $-(a-2b+3c)$.

44. 1) $a+(b-(c-d))$; 2) $a-(b-(c-d))$;
3) $a-((b-c)-d)$; 4) $a-(b+(c-(d-k)))$.

45. Раскрыть скобки и упростить:
1) $3a-(a+2b)$; 2) $5x-(2y-3x)$;
3) $3m-(5m-(2m-1))$; 4) $4a+(2a-(3a+2))$.

46. Заключить в скобки все слагаемые, начиная с числа m или $(-m)$, поставив перед скобками знак «+»:
1) $a+2b+m-c$; 2) $a-2b+m+c$;
3) $a-m-3c+4d$; 4) $a-m+3b^2-2a^3$.

47. Заключить в скобки все слагаемые, начиная с числа m или $(-m)$, поставив перед скобками знак «–»:
1) $2a+3b+m-c$; 2) $2a+b+m+3c$;
3) $c-m-2a^2+3b^2$; 4) $a-m+3b^2-2a^3$.

48. Упростить:
1) $(5a-2b)-(3b-5a)$; 2) $(6a-b)-(2a+3b)$;
3) $7x+3y-(-3x+3y)$; 4) $8x-(3x-2y)-5y$.

49. Найти значение выражения, предварительно упростив его:
1) $(7x+8y)-(5x-2y)$ при $x=-\frac{3}{4}$, $y=0{,}025$;
2) $(5c-6b)-(3c-5b)$ при $c=-0{,}25$, $b=2{,}5$

50. Доказать, что:
1) разность чисел $8m-n$ и $5m-4n$ делится на 3, если m и n — натуральные числа;

2) сумма числа $5m - 3n$ и числа, противоположного числу $m - 7n$, делится на 4, если m и n — натуральные числа;

3) при любых значениях a значение выражения $2(3a - 5) - (7 - (5 - 6a))$ отрицательно;

4) сумма любых двух нечётных чисел является чётным числом.

51. Выяснить, верно ли утверждение:

1) сумма любых двух чётных чисел делится на 4;

2) произведение любых двух двузначных чисел есть трёхзначное число.

52. В трёхзначном числе a сотен, b десятков, c единиц и $a > c$.

1) Составить и упростить сумму данного числа и числа, записанного теми же цифрами, но взятыми в обратном порядке.

2) Составить разность данного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке. Доказать, что полученная разность делится на 9 и на 11.

Диалог об истории

Какие скобки использовались в арифметике и алгебре?

Вы знаете, что скобки помогают в арифметике устанавливать порядок выполнения действий, недавно узнали, как в алгебраических выражениях с помощью скобок объединяют слагаемые в группы и т. д. С этой же целью математики вводили и другие символы. Так, в XVI в. итальянский математик *Раффаэле Бомбелли (ок. 1530—1572)* предложил выделять группы слагаемых следующими скобками: в начале выражения ставить букву L, а в конце — её же, но перевёрнутую (⅂).

А я слышал от бабушки, что они на уроках использовали и круглые, и квадратные скобки. Например, выражение, которое мы бы записали так: $2a - (3b + (c - a))$, бабушка в своё время записала бы иначе: $2a - [3b + (c - a)]$.

Всё верно. Так записывали алгебраические выражения в наших школах во второй половине XX в. Использовали ещё и фигурные скобки. Круглые же скобки появились в XV в. в работах *Михаэля Штифеля (ок. 1487—1567)*, *Николо Тартальи (ок. 1499—1557)* и др. Однако вплоть до XVII в. учёные в своих записях предпочитали ставить не скобки, а горизонтальные линии над группируемыми слагаемыми. Так поступали и *Ньютон*, и *Декарт (1596—1650)*. Например, выражение, которое твоя бабушка записывала с квадратными скобками, Ньютон записал бы так: $2a - \overline{3b + \overline{c - a}}$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

53. Вычислить значение числового выражения:

1) $\dfrac{\left(2,4-\dfrac{3}{4}\right)\cdot 0,6}{\left(\dfrac{3}{8}+0,25\right)\cdot 0,4}+\dfrac{7}{6-5\dfrac{13}{20}}$; 2) $\dfrac{\left(3,25-\dfrac{3}{4}\right)\cdot 6,25}{(2-0,75):\dfrac{4}{5}}+\dfrac{\left(5,5-3\dfrac{3}{4}\right):5}{(2-0,8)\cdot\dfrac{3}{4}}$.

54. Записать:

1) удвоенную разность чисел a и b;
2) удвоенное произведение чисел m и n;
3) частное от деления суммы чисел n и m на их разность;
4) произведение суммы чисел a и b и их разности.

55. Искусственный спутник Земли движется со скоростью 8000 м/с. За какое время он пройдёт путь, равный 48 000 км; 1 440 000 км?

56. Самолёт расходует a литров горючего на 1000 км пути.

1) Сколько литров горючего расходуется на 3000; 8000; 500; s километров пути?

2) Какой путь пролетел самолёт, если он израсходовал горючего $5a$; $0,1a$ литров?

57. Для охлаждения доменной печи через её стенки ежеминутно пропускается 26 кубометров воды. Сколько кубометров воды проходит через стенки доменной печи за: 1; 5; m суток?

58. Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $0,5(a-2b)-(3b+1,5a)$ при $a=0,48$, $b=0,03$;

2) $\left(\dfrac{1}{3}a+b\right)-\dfrac{2}{3}(a-1,5b)$ при $a=3$, $b=-3$.

59. За сутки холодильник потребляет 1,9 кВт · ч (киловатт-час) электроэнергии, а телевизор — 1 кВт · ч (при работе в среднем 4 ч за сутки). Сколько сто́ит электроэнергия, потреблённая приборами за 30 суток, если 1 кВт · ч стоит 1 р. 30 к.?

60. Не вычисляя, объяснить, почему:

1) произведение чисел 2,004 и 1,745 больше 3;
2) произведение чисел 1,2438 и 0,8 меньше 2.

61. Найти числовое значение алгебраического выражения:

1) $\dfrac{2mn(n+k)}{n-k}$ при $m=k=\dfrac{1}{3}$, $n=\dfrac{1}{2}$;

2) $\dfrac{(3p+l)\cdot 2p}{p-l}+\dfrac{1}{3}$ при $p=\dfrac{1}{3}$, $l=1$.

62. Сторона квадрата равна a единиц. Найти периметр и площадь прямоугольника, у которого ширина меньше стороны квадрата на 4 единицы, а длина больше на 8 единиц.

63. Вклад в банк составил 500 р. Через год банк начисляет вкладчику 15% от суммы вклада. Сколько денег будет на счету через год?

64. Турист 3 км пути прошёл пешком и проехал на автобусе t ч со скоростью 40 км/ч. Написать формулу пути s, проделанного туристом. Из этой формулы выразить t через s.

65. При увеличении скорости движения автомобиля вдвое его тормозной путь увеличивается в 4 раза. При скорости 30 км/ч тормозной путь легкового автомобиля равен 7,2 м, а грузового — 9,5 м. Найти тормозной путь этих автомобилей при скорости 60 км/ч.

66. Записать в виде алгебраического выражения:

1) сумму двух последовательных натуральных чисел, меньшее из которых равно n;

2) произведение двух последовательных натуральных чисел, большее из которых равно m;

3) сумму трёх последовательных чётных натуральных чисел, меньшее из которых равно $2k$;

4) произведение трёх последовательных нечётных натуральных чисел, меньшее из которых равно $2p+1$.

67. Туристы проплыли на плоту 6 ч со скоростью v км/ч. Затем они прошли по берегу 15 км. Написать формулу пути s, который преодолели туристы. Выразить из формулы v через s.

68. Верно ли утверждение:

1) если разность двух натуральных чисел — чётное натуральное число, то их сумма также число чётное;

2) если разность двух натуральных чисел — нечётное натуральное число, то их сумма также число нечётное?

69. Доказать, что сумма пяти последовательных натуральных чисел делится на 5.

70. Велосипедист выехал из города в село, расстояние между которыми s километров, со скоростью v километров в час. Преодолев 3 км пути, он сделал остановку. Записать формулу для нахождения времени, необходимого на преодоление оставшейся части пути. Успеет ли велосипедист после остановки доехать до села за 2,5 ч, если $s=36$, $v=12$?

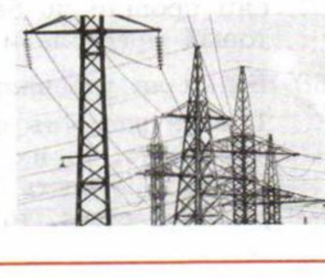
71. Сколько монет по 2 р. и 5 р. нужно взять, чтобы набрать 23 р.?

72. В магазин привезли n метров ткани по 60 р. за метр и m метров ткани по 50 р. за метр — всего на сумму 5100 р. Сколько метров ткани по 50 р. и по 60 р. привезли в магазин (n и m — натуральные числа), если $n>45$, $m>40$?

73. Сумма цифр двузначного числа меньше 10. Доказать, что результат умножения такого числа на 11 получится, если между цифрами этого числа вставить их сумму ($53 \cdot 11=583$).

ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Сливочное мороженое на 90% состоит из воды. Сколько воды содержится в 200 г такого мороженого?
2. Профессор испёк шарлотку (яблочный пирог), в котором было 60% яблок, а остальное — тесто. При этом 30% теста составляли яйца и сахар, остальное — мука. Вся масса пирога равна 1,2 кг. Какова масса муки в пироге?
3. У рабочего заработная плата N р. С неё удержали 13% подоходного налога. Какую сумму получил рабочий после этого?
4. После вычета 13% подоходного налога служащий получил K р. Какая заработная плата была начислена служащему?
5. После вычета 13% подоходного налога менеджер заплатил 20% от оставшихся денег в счёт погашения кредита. Какую сумму заплатил менеджер, если ему была начислена зарплата P р.?
6. Вова третью часть суток спит, 1,5 ч тратит на приём пищи, n ч — на учёбу, m мин — на дорогу. Сколько времени ежедневно остаётся у него на другие дела (известно, что такое время у него остаётся)?



7. Потери в проводах транспортируемой электроэнергии достигают m%. Сколько электроэнергии доходит до потребителя, если электростанция вырабатывает P мегаватт электроэнергии?

8. Земельная полоса шириной a м и длиной b км нарезана на k одинаковых участков прямоугольной формы со стороной a м. Найти площадь каждого участка.

9. Мощность электрического прибора P находится по формуле $P = UI$, где I — сила проходящего через прибор тока, U — напряжение на приборе. При этом известно, что силу тока можно найти по формуле $I = \frac{U}{R}$, где R — сопротивление прибора. Выразить мощность прибора через: 1) I и R; 2) U и R.

10. Площадь S треугольника находят по формуле $S = \frac{ah}{2}$, где a — основание треугольника, h — его высота (рис. 1). Найти: 1) высоту треугольника, если его площадь равна 25 см^2, а основание — 10 см; 2) основание треугольника, если его высота равна 80 мм, а площадь — 60 см^2.

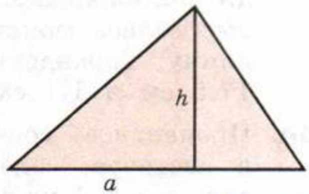


Рис. 1

Диалог о полезном

Вы помните, что среднее арифметическое двух чисел a и b равно $\frac{a+b}{2}$. В практике приходится находить среднее арифметическое любого количества однородных величин.

Например, если вы знаете заработную плату каждого работника, то сможете найти *среднюю* зарплату на этом предприятии. Для этого сложите зарплаты всех работников и разделите полученную сумму на число работающих на предприятии.

Аналогично находят, например, среднюю дневную температуру за месяц в конкретном регионе.

Профессор, а зачем нужно находить средние величины?

Их находят для того, чтобы легче было сравнивать числовые характеристики больших наборов *схожих* величин. Наверное, вы слышали, как по радио говорили: «В этом году средняя температура июля на 10° выше *климатической нормы*». Климатическая норма в июле — это и есть среднее значение температуры за многолетние температурные наблюдения в этом месяце года.

11. Найти средний рост мальчиков класса, если результаты измерения их роста (в сантиметрах) оказались следующими:
1) 162, 167, 160, 170, 168, 162, 163, 164;
2) 158, 161, 169, 171, 160, 166, 165, 168, 166, 164.

12. Найти среднее значение температуры (измеряемую в полдень) за первую декаду июля, если ежедневные замеры были следующими:

1) 27°, 28°, 28°, 29°, 24°, 24°, 25°, 26°, 25°, 24°;

2) 29°, 29°, 31°, 32°, 32°, 30°, 28°, 27°, 26°, 26°.

13. В мебельном магазине Ивану Петровичу захотелось измерить длину понравившегося дивана. Из-за отсутствия рулетки пришлось воспользоваться в качестве измерительных приборов подручными средствами: карандашом и монеткой. По длине дивана карандаш уместился 11 раз, а в оставшейся части 5 раз уместилась монетка. Дома Иван Петрович линейкой измерил длину карандаша и диаметр монеты. Размеры оказались 17,5 см и 1,1 см соответственно. Какова длина дивана?

14. Процентное содержание сахара в растворе, содержащем 0,3 кг сахара и 2,1 кг воды (рис. 2), находят так:

$$p\% = \frac{0,3}{0,3+2,1} \cdot 100\% = 12,5\%.$$

Каково процентное содержание сахара в растворе, полученном добавлением 400 г сахара в 3,6 кг воды?

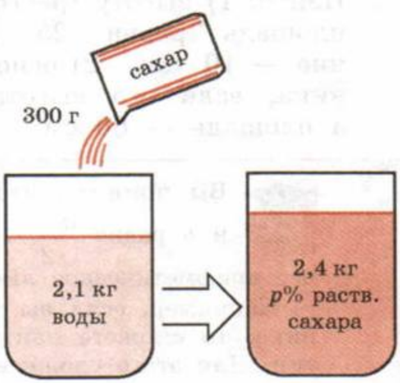


Рис. 2

15. Имеются три мерных отрезка известных длин a, b и c. При замере с их помощью длин сторон треугольника оказалось, что стороны выражаются через мерные отрезки следующим образом: $2a-b$, $3a+c$ и $4b-c$. Составить выражение для нахождения периметра треугольника и найти значение полученного выражения, если:

1) $a=3$ см, $b=2$ см, $c=1$ см; 2) $a=4$ см, $b=3$ см, $c=2$ см.

16. У бабушки на дачном участке стояли две большие бочки и имелись вёдра двух видов: n-литровые и m-литровые. Для полива растений внук носил полными вёдрами воду из пруда и заполнял бочки. Первая бочка заполнилась, когда в неё влили пять n-литровых и семь m-литровых вёдер воды. Во вторую бочку поместилась вода из шести n-литровых и пяти m-литровых вёдер. Сколько всего литров воды подготовил внук для полива растений, если:

1) $n=8$, $m=5$; 2) $n=10$, $m=8$?

17. Для полива овощей на огороде из полной 200-литровой бочки вычерпали восемь n-литровых и двенадцать m-литровых вёдер воды. Сколько воды осталось в бочке, если:
1) $n=10$, $m=5$; 2) $n=8$, $m=6$?

18. Фирма-посредник, на счету которой было 10 млн р., закупила в январе 150 компьютеров по цене a р., 70 пылесосов по цене b р. и 50 холодильников по цене c р. В феврале этого же года фирма закупила по тем же ценам 80 компьютеров, 50 пылесосов и 20 холодильников. Сколько денег осталось на счету этой фирмы к марту, если:
1) $a=22\,000$, $b=4000$, $c=15\,000$;
2) $a=17\,000$, $b=3000$, $c=18\,000$?

19. Оплата коммунальных услуг рассчитывается следующим образом. Теплоснабжение за каждый квадратный метр — a р.; вывоз мусора — b р. с человека; водоснабжение — c р. с человека; радиоточка — d р. Какова оплата коммунальных услуг за содержание квартиры площадью S м^2, в которой проживают n человек? Рассчитать оплату, если:
1) $S=43$, $n=3$, $a=30$, $b=50$, $c=200$, $d=25$;
2) $S=54$, $n=4$, $a=28$, $b=46$, $c=212$, $d=31$.

20. За каждый просроченный месяц в оплате коммунальных услуг начисляется пеня в размере 0,5% от суммы требуемого платежа. Какую сумму должен будет заплатить владелец квартиры, забывший оплатить коммунальные услуги за один месяц в размере m рублей, если захочет погасить долг по прошествии 5 месяцев?

В этой главе вы узнали,

что такое:
- числовое и алгебраическое выражения;
- числовое и алгебраическое равенства;
- действия первой, второй и третьей ступеней;
- формула;
- формулы чётного и нечётного натуральных чисел;
- алгебраическая сумма;

как:
- находить значения числового и буквенного выражений;
- составлять формулу по условию задачи;
- приводить подобные слагаемые;
- раскрывать скобки;
- заключать алгебраическую сумму в скобки.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

1. Вычислить:

а) $(17{,}2\cdot 4{,}01+4{,}01\cdot 32{,}8):1\frac{2}{3}$;

б) $\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2\frac{2}{3}-25\cdot 0{,}03\cdot 4$.

2. Упростить выражение $3(2y-x)-2(y-3x)$ и найти его числовое значение при $x=-\frac{2}{9}$, $y=0{,}25$.

3. Для лагеря купили 10 мячей и 5 ракеток. Один мяч стоит a рублей, а одна ракетка — b рублей. Написать выражение стоимости всей покупки.

II уровень

4. Вычислить: $0{,}5-1\frac{5}{16}:\left(2{,}25+\left(0{,}75-2\frac{5}{8}:7\right)\right)$.

5. Упростить выражение $6x-(2x-(3x-(4x+4)))$.

6. Тетрадь стоила n р., а ручка — m р. Записать стоимость покупки 2 тетрадей и 3 ручек после снижения цены ручки на 2%, а тетради — на 3%.

III уровень

7. Найти рациональным способом значение выражения

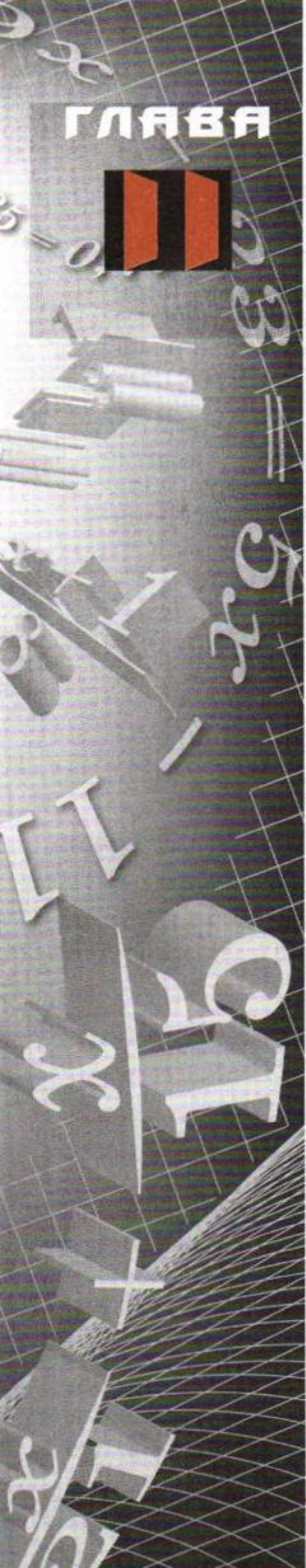
$$\frac{2}{3}(1{,}2+1{,}7+2{,}1+2{,}9+3{,}3+3{,}8).$$

8. Число сотен трёхзначного числа в 2 раза меньше числа десятков и в 3 раза меньше числа единиц. Доказать, что сумма этого числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 4.

9. Трое друзей покупали музыкальные инструменты. Первый внёс a р., второй — на 10% больше, чем первый, а третий — на 40% меньше, чем оба его друга внесли вместе. Чей взнос был самым большим?

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Возможные причины отсутствия научных открытий и достижений в период с III в. до н. э. и до начала новой эры.
2. История становления алгебры.
3. Появление буквенной символики в трудах древних учёных.
4. Отец алгебры Ф. Виет.
5. Происхождение числовых суеверий.



ГЛАВА II

Уравнения с одним неизвестным

В глубокой древности люди начали решать задачи с неизвестными количествами и описывать словами способы их решения. Фактически уже тогда они составляли и решали простые уравнения.

История сохранила легенду о том, как Пифагор на вопрос, сколько учеников посещает его школу, ответил: «Половина из них изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании, кроме того, есть ещё три женщины».

Попробуйте арифметическим способом решить задачу о числе учеников Пифагора. Не расстраивайтесь, если у вас ничего не получится. Изучив эту главу, вы сможете составить уравнение (математическую модель) для решения этих, а также многих других задач, научитесь преобразовывать уравнения и легко их решать.

В этой главе вы узнаете, что бывают уравнения, имеющие несколько *корней*. Например, уравнение $x \cdot x = 25$ (его можно записать в виде $x^2 = 25$) имеет два корня ($x = 5$ и $x = -5$), потому что число 25 можно получить как результат умножения двух одинаковых чисел двумя способами: $5 \cdot 5 = 25$ и $(-5) \cdot (-5) = 25$. Бывают такие уравнения, которые вообще не имеют корней. Например, нельзя найти значение x, удовлетворяющее уравнению $x \cdot x = -25$, так как нельзя получить отрицательное число при перемножении двух одинаковых чисел.

О важности навыков решения уравнений писал ещё в IX в. известный в Средней Азии учёный *Мухаммед бен Мусса ал-Хорезми*. В своём трактате «Китаб алджабр ва-л-мукабала» (от второго слова из названия трактата произошло слово *алгебра*) ал-Хорезми написал, что *алгебра — это искусство решать уравнения*.

В современном мире люди всех профессий либо используют уже созданные кем-то математические модели (в частности, уравнения), либо создают самостоятельно новые, помогающие глубже понять малоизученные явления окружающего нас мира.

§ 6 Уравнение и его корни

Алгебра первоначально развивалась из-за необходимости решения практических задач, в которых по известным величинам нужно было найти неизвестную. Составлялись уравнения для решения задач, связанных с земледелием, строительством, торговлей и пр. Постепенно развивалась и теория решения уравнений, которая в наше время является чёткой и стройной. В этом параграфе будут даны строгие определения понятий уравнение и корень уравнения, будут показаны примеры уравнений, не имеющих корней, и уравнений, имеющих бесконечно много корней.

Нужно вспомнить:

- понятие верного числового равенства;
- правила раскрытия скобок;
- правило приведения подобных слагаемых;
- понятие процента;
- понятие модуля числа.

Задача 1. Конверт с новогодней открыткой стоит 65 р. Конверт дешевле открытки на 35 р. Найти стоимость открытки.

► Пусть открытка стоит x р., тогда конверт стоит $(x-35)$ р. По условию задачи $x+(x-35)=65$, откуда $2x-35=65$, $2x=100$, $x=50$ р. ◁

В равенстве $x+(x-35)=65$ буква x обозначает неизвестное число, или, короче, неизвестное.

! Определение. Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется **уравнением**.
Выражение, стоящее слева от знака равенства, называется **левой частью уравнения**, а выражение, стоящее справа от знака равенства, — **правой частью уравнения.** Каждое слагаемое левой или правой части уравнения называется **членом уравнения.**

В уравнении $2x-35=65$ левая часть $2x-35$, правая часть 65. При $x=50$ левая часть этого уравнения равна 65, так как $2\cdot 50-35=65$; правая часть также равна 65. Итак, при $x=50$ это уравнение обращается в верное числовое равенство $2 \cdot 50 - 35 = 65$. Число 50 называют **корнем** данного **уравнения**.

! Определение. **Корнем уравнения** называется то значение неизвестного, при котором это уравнение обращается в верное равенство.

Например, число 1 является корнем уравнения $2x + 3 = 5$, так как $2 \cdot 1 + 3 = 5$ — верное равенство. Уравнение может иметь два корня, три корня и т. д. Например, уравнение $(x-1)(x-2)=0$ имеет два корня: 1 и 2, так как при $x=1$ и при $x=2$ это уравнение обращается в верное равенство, а при других значениях x левая часть уравнения не равна нулю. Уравнение $(x-3)(x+4) \times \times (x-5)=0$ имеет три корня: 3, -4 и 5.

Уравнение может иметь бесконечно много корней. Например, уравнение $2(x-1)=2x-2$ имеет бесконечно много корней: любое значение x является корнем этого уравнения, так как при любом x левая часть уравнения равна правой части.

Уравнение может и не иметь корней. Например, уравнение $2x+5=2x+3$ не имеет корней, так как при любом значении x левая часть этого уравнения больше правой.

! Определение. **Решить уравнение** — это значит найти все его корни или установить, что их нет.

В простейших случаях легко подобрать значение x, которое является корнем уравнения. Например, легко увидеть, что корень уравнения $2x+1=3$ — число 1. Однако это не всегда так. Например, трудно догадаться, что уравнение

$$\frac{x-6}{5}+\frac{4(x+3)}{2}-1=\frac{x-1}{2}+3x-\frac{7x-1}{10}$$

обращается в верное равенство при $x=7$. Поэтому важно научиться решать уравнения.

Решение многих практических задач сводится к решению уравнений, которые можно преобразовать в уравнение вида

$$ax=b, \qquad (1)$$

где a и b — заданные числа, x — неизвестное. При этом число a называют **коэффициентом** при неизвестном.

Уравнение (1) называют **линейным уравнением**. Например, уравнения $3x=1$, $-2x=0$, $0{,}4x=-7{,}2$ являются линейными.

Устные вопросы и задания

1. Какое равенство называют уравнением?
2. Что называют корнем уравнения?
3. Что значит решить уравнение?
4. Сколько корней может иметь уравнение?
5. Какое уравнение называется линейным? Привести примеры линейных уравнений.
6. Как доказать, что данное число является (не является) корнем уравнения?

Вводные упражнения

1. Вместо знака * записать такое число, чтобы полученное равенство было верным:
   1) $17 + * = 25$; 2) $38 - * = 39$; 3) $48 : * = -3$;
   4) $* \cdot (-13) = 39$; 5) $0{,}5 : 4 = *$; 6) $* : \frac{1}{3} = -9$.
2. Упростить выражение $5x - 3(x+7) + 10$ и найти его числовое значение при $x = 11$.
3. Найти числовые значения выражений $2(x-15) + 3x$ и $5x - 3 \cdot (2 - x)$ при $x = 1$; $x = 0$; $x = -8$. При каком из данных значений x числовые значения выражений равны?
4. Существует ли значение y, при котором числовые значения выражений $9y - 7$ и $9y + 5$ равны? Ответ обосновать.
5. Существует ли значение x, при котором числовые значения выражений $14x + 21$ и $7(2x+3)$ различны? Ответ обосновать.

Упражнения

74. Записать в виде равенства:
1) число 34 на 18 больше числа x;
2) число 56 в x раз больше числа 14;
3) полусумма чисел x и 5 равна их произведению.

75. Какое из чисел 3; –2 является корнем уравнения:
1) $3x = -6$; 2) $x + 3 = 6$;
3) $4x - 4 = x + 5$; 4) $5x + 10 = 2x + 4$?

76. (Устно.) При каких значениях x уравнение обращается в верное равенство:
1) $x + 5 = -3$; 2) $2x - 1 = 0$; 3) $\frac{x}{5} = \frac{6}{7}$; 4) $\frac{3}{8} = \frac{x}{2}$?

77. Есть ли среди чисел -1; $\frac{1}{2}$; 0 корень уравнения:
1) $4(x-1) = 2x - 3$; 2) $3(x+2) = 4 + 2x$;
3) $7(x+1) - 6x = 10$; 4) $5(x+1) - 4x = 4$?

78. Составить уравнение, корнем которого является число:

1) 5; 2) 3; 3) 0; 4) –4.

79. Подобрать число a так, чтобы уравнение $4x - 3 = 2x + a$ имело корень:

1) $x = 1$; 2) $x = -1$; 3) $x = \frac{1}{2}$; 4) $x = 0{,}3$.

80. Выяснить, имеет ли корни уравнение при заданном значении a:

1) $3x + a = 3x + 5$ при $a = 1$; 2) $\frac{1}{2}x + 3 = \frac{1}{2}x + a$ при $a = 4$.

Указать такое значение a, при котором данное уравнение имеет корни.

81. Записать данное утверждение в виде равенства и найти значение x, при котором равенство верно:

1) число x составляет 18% числа 75;
2) число 15 составляет 25% числа x.

82. Найти все значения x, при которых верно равенство:

1) $x(x-2) = 0$; 2) $2x(1-x) = 0$;
3) $x(x+3)(x-4) = 0$; 4) $(3-x)(x+2)(x-1) = 0$.

83. Найти все значения x, при которых верно равенство:

1) $|x| = 0$; 2) $|x| = 2$; 3) $|x| = \frac{1}{3}$; 4) $|x-1| = 2$.

Диалог об истории

Помните, в I главе я рассказывал вам, что Диофант в своих записях неизвестное число обозначал буквой ς?

Помним, что эта греческая буква называется «сигма концевая» и что Диофант жил в III в., но не знаем, почему он использовал именно эту букву?

С этой буквой случилась следующая история. В греческом алфавите было 28 букв (кстати, посмотрите в энциклопедическом словаре или в Интернете правильное написание всех этих букв). Диофант стал обозначать числа буквами греческого алфавита с чёрточками наверху. Числа от 1 до 9 он обозначил первыми девятью буквами, числа от 10 до 90 (через десяток) — следующими девятью буквами, а числа от 100 до 900 (через сотню) — девятью следующими буквами, включая предпоследнюю. Заметим, что для практических расчётов в те времена числа, большие 1000, почти не использовались. Оставшуюся 28-ю букву ς Диофант и решил использовать для обозначения неизвестного числа.

Интересно, какие уравнения умел решать Диофант?

Линейные уравнения он, конечно, умел решать. Я обязательно расскажу вам попозже и об уравнениях, которые носят название *диофантовых*. А линейные уравнения, с которыми вы познакомились в этом параграфе, умели, судя по всему, решать в Вавилоне, Египте, Китае и Индии ещё более 4000 лет назад. Например, в *папирусе Ахмеса* (представляющем собой свиток, сделанный из растений) содержатся задачи, в которых неизвестное обозначено специальным символом с названием «хау». Этот символ означает количество, кучу. «Исчисление кучи», применённое в папирусе, примерно соответствует нашему решению текстовых задач с помощью линейных уравнений. Например, в папирусе Ахмеса встречается такая задача: «Количество и его четверть вместе дают 15. Каково количество?» Эта задача решается с помощью уравнения $x+\frac{1}{4}x=15$, сводящегося к линейному.

§ 7 Решение уравнений с одним неизвестным, сводящихся к линейным

Уравнение $4x=12$ вы могли решить ещё в 6 классе. А решать уравнение $\frac{6x-5}{2}=\frac{7x}{3}-\frac{1}{2}$ вряд ли кто-то из вас возьмётся до изучения этого параграфа. Однако после изучения темы вы увидите, что второе уравнение сводится к первому и имеет тот же корень $x=3$.

В этом параграфе вы узнаете алгоритм решения уравнения, которое после преобразований принимает вид линейного.

Нужно вспомнить:

- понятие верного числового равенства;
- свойства верных равенств;
- действия с целыми и дробными числами;
- свойства арифметических действий;
- правила раскрытия скобок;
- правило приведения подобных слагаемых;

- нахождение неизвестных членов пропорции;
- нахождение модуля числа.

Решения уравнений с одним неизвестным, которые сводятся к линейным, основаны на свойствах верных равенств. Напомним эти свойства.

Словесная формулировка	Запись в общем виде	Пример
1. Если к обеим частям верного равенства прибавить одно и то же число или из обеих частей верного равенства вычесть одно и то же число, то получится верное равенство.	Если $a=b$ и l — любое число, то $a+l=b+l$, $a-l=b-l$.	$7=7$, $7+2=7+2$, $7-2=7-2$.
2. Если обе части верного равенства умножить или разделить на одно и то же не равное нулю число, то получится верное равенство.	Если $a=b$ и $m\neq 0$, то $a\cdot m=b\cdot m$, $a:m=b:m$.	$27=27$, $27\cdot 3=27\cdot 3$, $27:3=27:3$.

Из первого свойства следует, что слагаемое можно переносить из одной части равенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный.

● Пусть $a=b+m$. Тогда, прибавив к обеим частям этого равенства $(-m)$, получим $a+(-m)=b+m+(-m)$, откуда $a-m=b$. ○

Для того чтобы обосновать известный из курса математики 5—6 классов способ решения уравнений, проведём рассуждения на конкретном примере. При этом покажем, как применяются свойства равенств к решению уравнений.

Задача 1. Решить уравнение $9x-23=5x-11$.

► Предположим, что a — корень данного уравнения, т. е. a — такое число, при котором уравнение обращается в верное равенство. Имеем верное числовое равенство $9a-23=5a-11$. Воспользуемся свойствами верных равенств. Перенесём член $5a$ с противоположным знаком в левую часть, а член -23 в правую часть равенства с противоположным знаком. В результате также получится верное равенство $9a-5a=23-11$. Приведём подобные члены в обеих частях этого равенства, получим $4a=12$.

Разделив обе части последнего равенства на 4, найдем $a=3$. Итак, предположив, что уравнение имеет корень a, мы получили $a=3$.

Таким образом, если данное уравнение имеет корень, то он может быть равен только числу 3. Проверим, является ли число 3 на самом деле корнем данного уравнения. Подставим $x=3$ в левую и правую части исходного уравнения и проведём вычисления: $9 \cdot 3 - 23 = 4$, $5 \cdot 3 - 11 = 4$. При $x=3$ уравнение обратилось в верное равенство: $9 \cdot 3 - 23 = 5 \cdot 3 - 11$, следовательно, $x=3$ — единственный корень уравнения. ◁

При решении этой задачи были использованы следующие **основные свойства уравнений:**

Свойство 1 Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.

Свойство 2 Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

Применяя эти свойства, уравнения, сводящиеся к линейным, обычно решают так:

1) переносят члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а члены, не содержащие неизвестного, в правую (свойство 1);
2) приводят подобные члены;
3) делят обе части уравнения на коэффициент при неизвестном, если он не равен нулю (свойство 2).

Задача 2. Решить уравнение $2(x+3) - 3(x+2) = 5 - 4(x+1)$.

▶ Упростим левую и правую части уравнения: выполним умножение и приведём подобные члены. Получим:

$$2x + 6 - 3x - 6 = 5 - 4x - 4, \quad -x = -4x + 1.$$

Следовательно, $3x = 1$, откуда $x = \frac{1}{3}$. ◁

Задача 3. Решить уравнение $\frac{5x}{2} - \frac{x-3}{3} = 1 + \frac{x-5}{6}$.

▶ Умножив обе части уравнения на общий знаменатель дробей, т. е. на 6, получим

$$\frac{5x}{2} \cdot 6 - \frac{x-3}{3} \cdot 6 = 1 \cdot 6 + \frac{x-5}{6} \cdot 6, \quad 15x - 2(x-3) = 6 + x - 5.$$

Упростим обе части уравнения: $15x - 2x + 6 = 6 + x - 5$, $13x + 6 = x + 1$, откуда $12x = -5$, $x = -\frac{5}{12}$. ◁

При решении уравнения с одним неизвестным (как, например, в задачах 2 и 3) переходят от данного уравнения к более простому, имеющему те же корни. Поэтому проверку полезно делать только для того, чтобы убедиться в правильности вычислений.

В рассмотренных примерах каждое уравнение имело один корень. Однако может оказаться, что уравнение с одним неизвестным не имеет корней или любое значение неизвестного является корнем уравнения. Приведём примеры таких уравнений.

Задача 4. Решить уравнение $2(x+1)-1=3-(1-2x)$.

▶ Упростим обе части уравнения: $2x+2-1=3-1+2x$, $2x+1=$ $=2+2x$, откуда $2x-2x=2-1$, $0\cdot x=1$.

Это уравнение не имеет корней, так как левая часть $0\cdot x$ равна нулю при любом x, а значит, не равна 1.

Ответ. Корней нет. ◁

Задача 5. Показать, что любое значение x является корнем уравнения $3(1-x)+2=5-3x$.

▶ Упростим уравнение: $3-3x+2=5-3x$, $5-3x=5-3x$.

Последнее равенство является верным при любом значении x. Следовательно, любое значение x является корнем уравнения. ◁

Устные вопросы и задания

1. Сформулировать свойства уравнения.
2. Назвать свойство, которое использовалось для преобразования уравнения:
   1) $24+2x=40$, $2x=40-24$; 2) $3x=15$, $x=5$.
3. Сформулировать алгоритм решения уравнений, сводящихся к линейным.
4. Решить уравнение: 1) $0\cdot x=-6$; 2) $0\cdot x=0$.

Вводные упражнения

1. Дано верное равенство $\frac{5}{9}-\frac{2}{9}=\frac{1}{18}+\frac{5}{18}$ с положительными левой и правой частями. Не выполняя вычислений, выяснить, какие из приведённых ниже равенств являются верными:

1) $\left(\frac{5}{9}-\frac{2}{9}\right)\cdot 7=\left(\frac{1}{18}+\frac{5}{18}\right)\cdot 7;$ 2) $\left(\frac{5}{9}-\frac{2}{9}\right):3=\left(\frac{1}{18}+\frac{5}{18}\right):3;$

3) $\left(\frac{5}{9}-\frac{2}{9}\right)+1{,}15=\left(\frac{1}{18}+\frac{5}{18}\right)+1{,}13;$ 4) $\left(\frac{5}{9}-\frac{2}{9}\right)-\frac{4}{7}=\left(\frac{1}{18}+\frac{5}{18}\right)-\frac{4}{7};$

5) $\left(\frac{5}{9}-\frac{2}{9}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{18}+\frac{5}{18}\right):\left(-\frac{1}{3}\right);$ 6) $\left(\frac{5}{9}-\frac{2}{9}\right)\cdot(-5)=\left(\frac{1}{18}+\frac{5}{18}\right)\cdot 5.$

2. Является ли верным равенство $\frac{2x}{13}=\frac{14}{25}$, если известно, что верно равенство $\frac{x}{13}=\frac{7}{25}$?

Упражнения

(Устно.) Решить уравнение **(84—85)**.

84. 1) $x+3=5;$ 2) $x+8=11;$
3) $x-0{,}25=0{,}75;$ 4) $x-1{,}3=2{,}7.$

85. 1) $-2x=10;$ 2) $18x=-9;$ 3) $10x=0;$ 4) $15x=-15.$

Решить уравнение **(86—94)**.

86. 1) $9x=\frac{2}{5};$ 2) $-3x=2\frac{1}{7};$ 3) $-\frac{1}{2}x=3;$ 4) $\frac{3}{4}x=\frac{1}{2}.$

87. 1) $0{,}3x=6;$ 2) $1{,}3x=-1{,}69;$ 3) $0{,}7x=49;$ 4) $-10x=0{,}5.$

88. 1) $25x-1=9;$ 2) $7x+8=11;$
3) $3x-5=10-x;$ 4) $4x+4=x+5.$

89. 1) $5x+3(3x+7)=35;$ 2) $8x-(7x+8)=9;$
3) $8y-9-(4y-5)=12y-(4+5y);$
4) $4+8y+8=2y-(10+7y)+9.$

90. 1) $5(x-3)-2(x-7)+7(2x+6)=7;$
2) $11(y-4)+10(5-3y)-3(4-3y)=-6;$
3) $5(8z-1)-7(4z+1)+8(7-4z)=9;$
4) $10(3x-2)-3(5x+2)+5(11-4x)=25.$

91. 1) $\frac{11}{7}=\frac{2-x}{5};$ 2) $\frac{3x}{5}=\frac{6+x}{3};$ 3) $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=8;$ 4) $\frac{y}{3}+\frac{y}{4}=14.$

92. 1) $0{,}71x+1{,}98=0{,}37x-1{,}76;$ 2) $0{,}18y-7{,}4=0{,}05y-5{,}71;$
3) $5(5x-1)-2{,}7x+0{,}2x=6{,}5-0{,}5x;$
4) $0{,}36x-0{,}6=0{,}3(0{,}4x-1{,}2).$

93. 1) $\frac{x-4}{5}=9+\frac{2x+4}{9}$; 2) $2-\frac{3x-7}{4}+\frac{x+17}{5}=0$;

3) $\frac{8-y}{5}+\frac{5-4y}{3}=\frac{y+6}{2}$; 4) $\frac{4x+7}{5}+\frac{3x-2}{2}-\frac{5x-2}{2}=32$.

94. 1) $\frac{4x-51}{3}-\frac{17-3x}{4}=\frac{x+5}{2}$; 2) $\frac{3x-7}{4}-\frac{9x+11}{8}=\frac{3-x}{2}$;

3) $\frac{9x-5}{2}-\frac{3+5x}{3}-\frac{8x-2}{4}=2$; 4) $\frac{4x-3}{2}-\frac{5-2x}{3}=\frac{3x-4}{3}$.

95. Показать, что уравнение не имеет корней:

1) $28-20x=2x+25-16x-12-6x$;

2) $25x-17=4x-5-13x+14+34x$;

3) $\frac{x-1}{3}+\frac{5x+2}{12}=\frac{5+3x}{4}$; 4) $\frac{2x+1}{3}-\frac{7x+5}{15}=\frac{x-2}{5}$.

96. Показать, что любое значение x является корнем уравнения:

1) $10-4x+3=9x-2-6x+9-7x+6$;

2) $9x+4-5x=8+7x-9-3x+5$;

3) $6(1{,}2x-0{,}5)-1{,}3x=5{,}9x-3$;

4) $8(1{,}3x+0{,}25)-6{,}6x=3{,}8x+2$.

97. По тексту высказывания составить уравнение и решить его:

1) если число x уменьшить на 26%, то получится число 7,4;

2) если число x увеличить на 20%, то получится число 9,6;

3) произведение чисел $3\frac{1}{4}$ и x в 2 раза больше суммы чисел 1 и x;

4) сумма чисел $\frac{7}{12}$ и $2x$ в 3 раза меньше одной четвёртой числа $25x$.

98. Решить уравнение, используя свойства пропорции:

1) $\frac{x}{1{,}5}=\frac{1{,}6}{0{,}3}$; 2) $\frac{0{,}07}{0{,}09}=\frac{x}{1{,}8}$; 3) $\frac{3x}{1{,}7}=\frac{0{,}21}{6{,}8}$; 4) $\frac{1{,}08}{7{,}6}=\frac{5x}{3{,}8}$.

99. Решить уравнение относительно x, если a и b — заданные числа, отличные от нуля:

1) $ax-3=b$; 2) $4+bx=a$; 3) $b=a(x-3)$;

4) $4=a-(bx-1)$; 5) $\frac{2x-a}{b}=3$; 6) $\frac{1-bx}{a}=1$.

$\boxed{100.}$ Решить уравнение:

1) $|x|=2{,}5$; 2) $|x|=3$; 3) $2|x|=0{,}48$;

4) $5|x|=1{,}15$; 5) $|2x|=1{,}4$; 6) $|3x|=0{,}03$.

Диалог об истории

Ал-джабр и ал-мукабала, а также метод ложного положения

Профессор, во введении к главе сказано, что алгебра — это искусство решать уравнение, а также, что название алгебры связано со вторым словом в заголовке книги ал-Хорезми «Китаб ал-джабр ал-мукабала». Но что означает это слово, я не знаю.

Ал-Хорезми решал уравнения с помощью двух приёмов. Первый приём назывался *ал-джабр* (восстановление) и заключался в перенесении вычитаемых (отрицательных чисел) из одной части уравнения в другую. В те времена отрицательные числа считали «искусственными», а после перенесения их в другую часть уравнения числа превращались в «настоящие» (положительные) числа. Второй приём, *ал-мукабала* (противопоставление) — отбрасывание из обеих частей уравнения одинаковых членов — был похож на современное приведение подобных слагаемых. Например, решая уравнение $8x-13=5x-1$, ал-Хорезми сперва применял *ал-джабр* и получал $8x+1=5x+13$. Затем он применял *ал-мукабалу* (отнимал от обеих частей уравнения $5x$ и 1) и получал уравнение $3x=12$, после чего легко находил его корень: $x=4$.

Теперь понятно, что означает слово *ал-джабр*. Но Вы хотели рассказать нам ещё об одном методе решения уравнений.

Да, я хотел рассказать о совсем старом способе решения некоторых уравнений, описанном ещё в древних папирусах. Называется он *методом ложного положения*, хотя точнее его следовало бы назвать *методом ложного предположения*. Суть его вы поймёте из решения уравнения $x+\frac{1}{3}x=20$. Для решения этого уравнения брали наименьшее натуральное число, от которого третья часть — целое число. В данном случае это число 3. Третья часть от 3 равна 1, да ещё само число, получается 4. Так как по условию сумма $x+\frac{1}{3}x$ должна быть равна 20, а не 4, следовательно, x должен быть во столько же раз больше, во сколько 20 больше, чем 4 (т. е. в 5 раз). Значит, $x=15$. Попробуйте-ка обосновать справедливость такого метода решения данного уравнения. Ваших знаний для этого уже хватит.

§ 8 Решение задач с помощью уравнений

В этом параграфе рассказывается о создании математических моделей реальных явлений, а также о главном предназначении уравнений — решении практических задач. Такие задачи исторически развивали язык алгебры и совершенствовали методы решения уравнений. Вы научитесь выделять этапы решения задачи. Составленные по условиям задач уравнения потребуют от вас применения ранее полученных знаний и умений.

Нужно вспомнить:

- свойства уравнений;
- формулы законов движения и работы;
- формулу расчёта стоимости покупки;
- формулы, выражающие скорости движения по течению и против течения реки через собственную скорость и скорость течения;
- основные задачи на проценты.

Применение уравнений позволяет упростить решение многих задач. При этом решение задачи обычно состоит из трёх этапов:

1) составление уравнения по условиям задачи;
2) решение уравнения;
3) проверка результата и запись ответа.

Рассмотрим задачу.

Задача. Теплоход с туристами отправился от пристани вниз по течению реки и должен вернуться обратно через 5 ч. Скорость течения реки 3 км/ч, скорость теплохода в стоячей воде 18 км/ч. На какое расстояние туристы могут отплыть от пристани, если они хотят пробыть на берегу 3 ч?

► 1) Пусть искомое расстояние x километров. Это расстояние вниз по течению теплоход проходит со скоростью $18+3=$ $=21$ км/ч и затрачивает $\frac{x}{21}$ ч. Возвращаться теплоход будет со скоростью $18-3=15$ км/ч и затратит $\frac{x}{15}$ ч. На берегу туристы пробудут 3 ч. Значит, вся поездка займёт $\left(\frac{x}{21}+\frac{x}{15}+3\right)$ ч, что по условию задачи равно 5 ч. Таким образом, мы получили для определения расстояния x уравнение $\frac{x}{21}+\frac{x}{15}+3=5$.

2) Перейдём теперь к решению уравнения $\frac{x}{21}+\frac{x}{15}=2$.

Умножая обе части этого уравнения на 105 (наименьшее общее кратное чисел 21 и 15), получаем $5x+7x=210$, $12x=210$, откуда $x=17{,}5$.

Ответ. 17,5 км. ◁

На первом этапе решения задачи (т. е. при составлении уравнения) необходимо было знать, что скорости теплохода и реки при движении по течению складываются, а при движении против течения вычитаются, и что путь, делённый на скорость, есть время движения.

На втором этапе (т. е. при решении полученного уравнения) потребовалось применить изученные в предыдущем параграфе свойства уравнений. Для получения ответа нужно было возвратиться к условию задачи и использованному обозначению.

Чтобы проверить, правильно ли решена задача, следует, пользуясь условиями данной задачи, составить другую, в которой найденный результат становится известным, а какое-нибудь ранее известное данное нужно найти, например такую задачу:

Теплоход с туристами отправился от пристани вниз по течению реки, проплыл 17,5 км и после трёхчасовой стоянки вернулся обратно. Скорость течения реки 3 км/ч, скорость теплохода в стоячей воде 18 км/ч. Сколько времени длилась поездка?

Устные вопросы и задания

1. Назвать основные этапы решения текстовой задачи.
2. Из формулы $s=vt$ выразить v; t.
3. Из формулы $p=\frac{A}{t}$ выразить A; t.
4. Что такое скорость движения объекта?
5. Что такое производительность труда?
6. Как найти $n\%$ от числа A?
7. Как найти число, если $n\%$ его равны B?

Вводные упражнения

1. Велосипедисту нужно проехать s км за 3 ч. С какой скоростью он должен двигаться?
2. Найти время движения лодки между пристанями A и B по течению и против течения реки, если расстояние AB равно 45 км, скорость лодки — 7 км/ч, а скорость течения реки — 2 км/ч.

3. Оператор на компьютере за восьмичасовой рабочий день может набрать p страниц текста. Сколько часов t ему понадобится, чтобы набрать A страниц текста, если он будет работать с той же производительностью?

4. Стоимость одного киловатт-часа электроэнергии в домах с электроплитами равна x р., что на $a\%$ меньше, чем в домах с газовыми плитами. Выразить стоимость одного киловатт-часа электроэнергии в домах с газовыми плитами через a и x.

5. Найти число, если 40% его равны 96.

6. Найти 15% от 300 кг.

7. После добавления 200 г сахара в a г воды образовался 10%-ный раствор сахара (рис. 3). Найдём a:

$$\frac{200}{a+200}\cdot 100\% = 10\%,$$

$$\frac{200}{a+200} = \frac{10}{100},$$

$$a = 1800 \text{ г.}$$

В какое количество воды нужно добавить 200 г сахара, чтобы получить 15%-ный раствор?

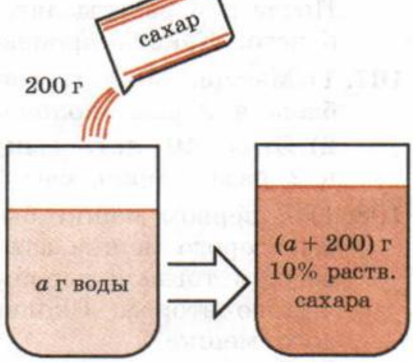


Рис. 3

Упражнения

101. Ученик задумал число. Если его умножить на 4, к произведению прибавить 8 и полученную сумму разделить на 2, то получится 10. Какое число задумал ученик?

102. 1) Поезд имеет в своём составе цистерны, платформы и товарные вагоны. Цистерн на 4 меньше, чем платформ, и в 2 раза меньше, чем товарных вагонов. Сколько в составе поезда отдельно цистерн, платформ и товарных вагонов, если их общее число равно 68?

2) Три цеха изготовили 869 деталей. Второй цех изготовил деталей в 3 раза больше, чем первый, а третий — на 139 меньше, чем второй. Сколько деталей изготовил каждый цех отдельно?

103. В кассе лежит 98 монет по 1, 2, 5 р. Монет по 2 р. на 10 больше, чем монет по 1 р., а монет по 5 р. в 7 раз больше, чем монет по 2 р. Сколько в кассе монет по 1, 2, 5 р. в отдельности?

104. Найти три последовательных нечётных числа, сумма которых равна 81.

105. Имеются четыре последовательных чётных числа. Если удвоенную сумму крайних чисел уменьшить на 2, то получится 34. Найти эти числа.

106. 1) Бригада лесорубов ежедневно перевыполняла норму по заготовке леса на 16 м^3, поэтому недельную норму (6 рабочих дней) она выполнила за 4 дня. Сколько кубометров леса заготовляла бригада в день?

2) В цехе поставили автомат, производительность которого была на 8 деталей в час выше производительности рабочего. После 2 ч работы автомат выполнил шестичасовую норму рабочего. Какова производительность автомата?

107. 1) Матери 50 лет, дочери 28. Сколько лет тому назад дочь была в 2 раза моложе матери?

2) Отцу 40 лет, сыну 16. Через сколько лет отец будет в 2 раза старше сына?

108. 1) В первом мешке было 50 кг сахара, а во втором — 80 кг. Из второго мешка взяли сахара в 3 раза больше, чем из первого, и тогда в первом мешке сахара осталось вдвое больше, чем во втором. Сколько килограммов сахара взяли из каждого мешка?

2) В одном элеваторе было зерна в 2 раза больше, чем в другом. Из первого элеватора вывезли 750 т зерна, на второй элеватор привезли 350 т, после чего в обоих элеваторах зерна стало поровну. Сколько зерна было первоначально в каждом элеваторе?

109. 1) Бригада должна была выполнить заказ за 10 дней. Ежедневно перевыполняя норму на 27 деталей, бригада за 7 дней работы не только выполнила задание, но ещё изготовила дополнительно 54 детали. Сколько деталей в день изготовляла бригада?

2) Заказ по выпуску машин завод должен был выполнить за 15 дней. Но уже за 2 дня до срока завод не только выполнил заказ, но и выпустил сверх заказа ещё 6 машин, так как ежедневно выпускал по 2 машины сверх заказа. Сколько машин должен был выпустить завод, чтобы выполнить заказ?

110. 1) Лодка шла против течения реки 4,5 ч и по течению 2,1 ч. Найти скорость лодки в стоячей воде, если она прошла всего 52,2 км, а скорость течения реки равна 3 км/ч.

2) Лодка шла по течению реки 2,4 ч и против течения 3,2 ч. Путь, пройденный лодкой по течению, оказался на 13,2 км длиннее пути, пройденного против течения. Найти скорость лодки, если скорость течения реки равна 3,5 км/ч.

111. 1) На школьных соревнованиях по плаванию один ученик проплыл некоторое расстояние по течению реки за 24 с и то же расстояние против течения за 40 с. Определить собственную скорость пловца, считая её постоянной от начала и до конца заплыва, если скорость течения реки равна 0,25 м/с.
2) Расстояние между двумя пунктами катер прошёл по течению за 3 ч 30 мин, а против течения за 6 ч 18 мин. Определить расстояние между этими пунктами, если скорость течения реки равна 2,4 км/ч.

112. 1) Из одного пункта вначале вышел пешеход, а через 1,5 ч после его выхода в том же направлении выехал велосипедист. На каком расстоянии от пункта отправления велосипедист догнал пешехода, если пешеход шёл со скоростью 4,25 км/ч, а велосипедист ехал со скоростью 17 км/ч?
2) Два теплохода вышли одновременно из одного пункта и идут в одном направлении. Первый теплоход за каждые 1,5 ч проходит 37,5 км, а второй теплоход за каждые 2 ч проходит 45 км. Через сколько времени первый теплоход будет находиться от второго на расстоянии 10 км?

113. 1) Магазин продавал пальто и куртки. Куртка стоила на 1500 р. дешевле пальто. На сезонной распродаже цена на куртки была снижена на 20%, а на пальто — на 10%, и теперь одну куртку и одно пальто можно было купить за 6450 р. Сколько стоили куртка и пальто до распродажи?
2) Один рабочий в день выпускал на 50 деталей меньше другого. Когда выработка первого повысилась на 1% в день, а второго — на 2%, они стали вместе выпускать 254 детали. Сколько деталей выпускал каждый рабочий первоначально?

114. 1) Туристы за первый час прошли 3 км. Если бы они продолжали двигаться с той же скоростью, то опоздали бы к месту сбора на 40 мин, поэтому они увеличили скорость на $\frac{1}{3}$ и пришли к месту сбора за 45 мин до назначенного срока. Какое расстояние прошли туристы до места сбора и за какое время?
2) Первый час автомобилист ехал со скоростью 50 км/ч и рассчитал, что если он и дальше будет ехать с той же скоростью, то опоздает в город на полчаса. Он увеличил скорость на 20% и прибыл в город вовремя. Какой путь проехал автомобилист и сколько времени он находился в пути?

115. 1) Из двух пунктов, расстояние между которыми 340 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Скорость одного на 5 км/ч больше скорости другого. Найти скорости поездов, если известно, что через 2 ч после начала движения расстояние между ними было 30 км.

2) Из городов А и В, расстояние между которыми 230 км, одновременно выехали навстречу друг другу два мотоциклиста. Через 3 ч после начала движения расстояние между ними было 20 км. Найти скорости мотоциклистов, если скорость одного на 10 км/ч меньше скорости другого.

Диалог об истории

Задачи Диофанта и диофантовы уравнения

Расскажу подробнее об уравнениях, которые умел решать Диофант. Начну с того, как стало известно, чем занимался этот учёный 17 веков назад. В 1403 г. в Венеции *Региомонтаном (1436— 1476)* были найдены труды Диофанта. Основным из этих трудов являлась «Арифметика», состоявшая из 13 книг (до наших дней сохранились 6 из них). Региомонтан писал тогда, что в работах Диофанта собран «весь цвет арифметики и искусство неизвестной».

В сохранившихся книгах Диофанта содержится 189 задач с решениями. Если в первой из сохранившихся книг рассмотрены задачи, приводящиеся к линейным и квадратным уравнениям (квадратные уравнения вы будете решать в 8 классе), то в остальных пяти книгах рассматривались *неопределённые уравнения*. Среди них — *линейные уравнения с двумя неизвестными* (x и y) вида $ax+by=c$, решаемые в целых неотрицательных числах, впоследствии получившие название *диофантовых уравнений*. Уравнения такого вида решались ещё в древности при астрономических и календарных расчётах.

Профессор, приведите пример диофантова уравнения. Мне кажется, что одно уравнение с двумя неизвестными однозначно решить нельзя. Например, решениями уравнения $x+y=25$ могут быть как числа 12 и 13, так и числа 10 и 15.

Рассмотрим задачу, приводящую к решению линейного уравнения с двумя неизвестными. Допустим, ты портной, пришивающий пуговицы на рубашки двух видов: к одним рубашкам нужно пришивать по 8 пуговиц, а к другим — по 7. У тебя есть 100 одинаковых замечательных пуговиц. К какому количеству рубашек какого вида ты сможешь пришить все пуговицы?

Значит, нужно решить уравнение $8x + 7y = 100$, где x — число рубашек с 8 пуговицами, а y — число рубашек с 7 пуговицами? Но нас не учили решать такие уравнения.

Я помогу тебе. Выразим из этого уравнения y:

$$7y = 100 - 8x, \quad y = \frac{100 - 8x}{7}, \text{ или } y = \frac{4(25 - 2x)}{7}.$$

Так как числа 4 и 7 взаимно простые, то, чтобы y оказался целым неотрицательным числом, нужно, чтобы $25 - 2x$ делилось на 7. Это возможно лишь при $x = 2$ и $x = 9$. Соответствующие значения y будут равны 12 и 4. Таким образом, наша задача имеет два решения (как и составленное по её условию уравнение): $x = 2$, $y = 12$ и $x = 9$, $y = 4$.

Профессор, дайте, пожалуйста, ещё задачу на диофантовы уравнения. Я попробую решить её сам.

Задам шутливую задачу. Трёхногие инопланетяне выгуливают на лужайке своих двуногих питомцев. Кто-то подсчитал, сколько ног ходит по лужайке. Их оказалось 15. Сколько было инопланетян и сколько их питомцев?

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

Решить уравнение **(116—117)**.

116. 1) $3y + 5 = 4\left(9 - \frac{y}{2}\right)$; 2) $8\left(11 - \frac{3}{4}z\right) = 16z - 44$;

3) $3\left(5 + \frac{x}{2}\right) = 4 + 2x$; 4) $2\left(3 - \frac{x}{3}\right) = 5 + x$.

117. 1) $\frac{x-2}{4} - \frac{1}{2} = \frac{x+7}{6}$; 2) $\frac{x-7}{6} = \frac{x+1}{2} - 3$;

3) $\frac{2(3x-1)}{5} = 4 - \frac{x+2}{2}$; 4) $\frac{1}{2} - \frac{3x}{4} = \frac{2(3-x)}{5}$.

118. 1) На первой ферме был сделан запас силоса 7 т 680 кг, а на второй — 9 т 600 кг. На первой ферме ежедневно расходуется 352 кг, а на второй — 480 кг силоса. Через сколько дней запасы силоса на обеих фермах станут равными?
2) На первую овощную базу было завезено 145 т 480 кг картофеля, а на вторую — 89 т 7 ц. С первой базы ежедневно вывозят в магазины по 4 т 40 кг картофеля, а со второй — по 2 т 550 кг. Через сколько дней на второй базе останется картофеля в 2 раза меньше, чем на первой?

119. 1) Собранный виноград предполагалось уложить в ящики, по 9,2 кг в каждый. Вместо этих ящиков взяли другие, вмещающие по 13,2 кг каждый, и тогда потребовалось на 50 ящиков меньше. Сколько килограммов винограда было уложено?

2) Расстояние между станциями A и B пассажирский поезд проходит на 45 мин быстрее, чем товарный. Определить расстояние между этими станциями, если скорость пассажирского поезда равна 48 км/ч, а товарного — 36 км/ч.

120. Суммарная масса первого и второго советских искусственных спутников Земли составила 592,4 кг. Первый спутник был легче третьего на 1243,4 кг, второй — на 818,2 кг. Найти массу каждого из трёх первых искусственных спутников Земли.

121. При каком x значение $3(x-1)-2(3-x)-1$ равно 1?

122. При каком значении x значения выражений равны:

$\frac{3x-1}{5}-\frac{5x+1}{6}$ и $\frac{x+1}{8}-3$?

123. Подобрать число a такое, чтобы уравнение имело корни:

1) $5x-7=5x-a$;
2) $x-(2-x)=2x-a$;
3) $\frac{a}{2}-\frac{x}{2}=\frac{1}{2}x-(x-8)$;
4) $\frac{x}{3}+\frac{a}{5}=(x+15)-\frac{2}{3}x$.

124. При каких значениях a уравнение $|x|=a$:

1) не имеет корней; 2) имеет только один корень?

125. Решить уравнение, принимая за неизвестное x, и выяснить, при каких значениях a это уравнение имеет корни:

1) $2x-3(x-a)=3+a$;
2) $a+6(x-1)=2a+x$;
3) $\frac{ax-2}{2}=\frac{3-ax}{4}$;
4) $\frac{5-ax}{3}=\frac{7-ax}{6}$;
5) $ax-3(1+x)=5$;
6) $7-ax=2(3+x)$.

126. Первый час туристы шли на станцию со скоростью 3,5 км/ч. Если они и дальше будут идти с той же скоростью, то придут на час позже намеченного срока. Увеличив скорость на 1,5 км/ч, туристы прибыли на станцию на 30 мин раньше намеченного срока. Какой путь прошли туристы?

127. Расстояние между двумя посёлками равно 9 км. Дорога имеет подъём, равнинный участок и спуск. Скорость пешехода на подъёме равна 4 км/ч, на равнинном участке 5 км/ч, а на спуске 6 км/ч. Сколько километров составляет равнинный участок, если пешеход проходит расстояние от одного посёлка до другого и обратно за 3 ч 41 мин?

128. Яблоки при сушке теряют 84% своей массы. Сколько надо взять свежих яблок, чтобы приготовить 16 кг сушёных?

129. Кофе при обработке теряет 12% массы. Сколько килограммов кофе надо взять, чтобы получить 4,4 кг сухого кофе?

130. Решить с помощью микрокалькулятора уравнение:
1) $173x+199{,}6=2517{,}8$; 2) $24{,}8x+25{,}47=71{,}35$.

131. Решить уравнение: 1) $|2x-1|=3$; 2) $|1-5x|=2$.

132. Поезд идёт со скоростью 40 км/ч. По наблюдению машиниста, встречный поезд, длина которого 75 м, проходит мимо него за 3 с. Какова скорость движения встречного поезда?

Это интересно

А помните, ребята, на кружковых занятиях в младших классах вам предлагали решать *числовые ребусы*? Вы и не догадывались, что готовитесь к решению уравнений.

Действительно, не думали об этом. А какие уравнения нужно составлять при решении, например, такого ребуса:

$$\begin{array}{r} 7*8 \\ +\ *4* \\ \hline *041 \end{array}?$$

Сложение столбиком начинается с разряда единиц. Очевидно, вместо звёздочки может быть поставлена только цифра 3, так как уравнение $8+x=1$ не имеет корней среди однозначных натуральных чисел (а корнем уравнения $8+x=11$ является число 3).

Аналогично составляем уравнение для разряда десятков: $x+4+1=4$ (единица в левой части уравнения перенесена из разряда единиц после суммирования). Корень этого уравнения $x=-1$ — отрицательное число, поэтому для нахождения неизвестного числа в разряде десятков нужно решать уравнение $x+4+1=14$, откуда $x=9$.

Аналогичными рассуждениями приходим к выводу, что в разряде сотен должна стоять цифра 2. Таким образом, предложенный пример сложения выглядит так:

$$\begin{array}{r} 798 \\ +\ 243 \\ \hline 1041 \end{array}.$$

Предложу вам отдохнуть за решением чуть более сложных ребусов:

1) $$\begin{array}{r} 36*87 \\ +529*4 \\ *3802 \\ \hline *1*43* \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} *5* \\ \times\ \ *8 \\ \hline 2*64 \\ +\ 1*3* \\ \hline *718* \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r} 2*9 \\ \times\ \ ** \\ \hline *** \\ +\ **** \\ \hline ***08 \end{array}$$

4) $$\begin{array}{l|l} -\,1*5 & ** \\ \ \ ** & \overline{*3} \\ \hline \ \ -\,** & \\ \ \ \ \ 4* & \\ \hline \ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

Конечно, найти отдельные неизвестные цифры в ребусах вы сможете и не решая даже простейших уравнений. Например, понятно, что в задании 2) последней цифрой произведения будет 4.

СТАРИННЫЕ ЗАДАЧИ

1. *(Задача о жизни Диофанта.)* Диофант провёл шестую часть своей жизни в детстве; двенадцатую — в юности; после седьмой части, проведённой в бездетном супружестве, и ещё после 5 лет у него родился сын, умерший по достижении половины лет жизни отца; после этого Диофант прожил только 4 года. Сколько лет прожил Диофант?
2. *(Задача из книги «Косс» Адама Ризе.)* Трое выиграли некоторую сумму денег. На долю первого пришлась четверть этой суммы, на долю второго — седьмая часть, а на долю третьего — 17 флоринов. Каков весь выигрыш?
3. *(Автор неизвестен.)* Летела стая гусей. Навстречу им летит один гусь и говорит: «Здравствуйте, 100 гусей!» Те ему отвечают: «Нас не 100 гусей. Если бы нас было столько, сколько есть, да ещё столько, да полстолько, да четвертьстолько, да ещё ты, глупый гусь, был бы с нами, тогда нас было бы 100!» Сколько гусей было в стае?
4. *(Задача из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.)* Некто пришёл в ряд, купил игрушек для малых ребят: за первую игрушку заплатил $\frac{1}{5}$ часть всех своих денег, за другую — $\frac{3}{7}$ остатка от первой покупки, за третью игрушку заплатил $\frac{3}{5}$ остатка от второй покупки. А по приезде домой нашёл в кошельке остальных денег 1 р. 92 к. Спрашивается, сколько в кошельке денег было и сколько за каждую игрушку денег заплачено?

ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Периметр равнобедренного треугольника равен 46 см. Найти стороны треугольника, если боковая сторона на 5 см больше основания.
2. В равнобедренном треугольнике основание составляет 0,4 боковой стороны. Найти стороны треугольника, если его периметр равен 36 см.
3. По всей границе земельного участка прямоугольной формы поставили забор. Ширина участка 150 м, а длина всего забора 1 км. Найти длину участка.
4. Вдоль границы участка прямоугольной формы, длина которого в 3 раза больше ширины, вырыли канаву длиной 240 м. Найти длину и ширину участка.
5. Из стальной проволоки диаметром 5 мм следует изготовить винтовую цилиндрическую пружину с целым числом витков

и высотой 122 мм. Найти количество витков пружины, если зазор между витками пружины должен составлять 8 мм.

6. Ученик пишет заголовок газеты «Школьный бал». Длина листа 80 см, по 7 см он оставляет слева и справа от заголовка. Ширина каждой буквы и каждого просвета между словами в 2 раза больше просвета между буквами. Какой ширины получилась каждая буква в заголовке?

7. Во время стирки ткань садится на $\frac{1}{16}$ по длине и на $\frac{1}{18}$ по ширине. Сколько метров ткани шириной 90 см нужно приобрести, чтобы после стирки иметь 51 м^2 материала?

8. Фирма выпускает кофемолки, которые она предполагает реализовывать по цене 3000 р. (за штуку). На приобретение деталей для изготовления одной кофемолки фирма тратит 1800 р., а за аренду помещения, зарплату сотрудникам и рекламу фирма платит 3 000 000 р. ежегодно. Считая, что других статей расходов у фирмы нет, определить, какое минимальное количество кофемолок должна реализовывать фирма ежегодно, чтобы не нести убытков.

9. Три фирмы продали 236 компьютеров. Вторая фирма продала на 10% больше компьютеров, чем первая, а третья — на 100 компьютеров меньше, чем первые две вместе. Сколько компьютеров продала каждая фирма?

10. Фирмы A, B и C владеют 75% всех акций некоторого предприятия. Количества их акций находятся в отношениях $4 : 12 : 9$. Остальные 150 000 акций принадлежат работникам предприятия. Сколькими акциями владеет каждая фирма?

В этой главе вы узнали,

что такое:

— корень уравнения;
— линейное уравнение с одним неизвестным;

как:

— применять свойства уравнений;
— решать уравнения, сводимые к линейным;
— составлять уравнения по условию задачи;
— проверять правильность решения задачи.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

1. Проверить, есть ли среди чисел 1; 0; −4 корень уравнения $3(x-7)+4=7x-1$.

2. Решить уравнение:
а) $2x-3(x-1)=4+2(x-1)$; б) $\frac{x}{3}+\frac{x+1}{4}=2$.

3. За 15 м ткани двух сортов заплатили 2840 р. При этом 1 м ткани I сорта стоит 200 р., а II сорта — 180 р. Сколько метров ткани каждого сорта куплено?

II уровень

4. Доказать, что корнем уравнения $3x-1{,}5=2(x-0{,}75)+x$ является любое число.

5. При каком x значение выражения $\frac{x-2}{3}$ на 2 больше значения выражения $\frac{x-3}{2}$?

6. От пристани A до пристани B лодка плыла по течению реки 3,5 ч. На обратный путь она затратила 5 ч 15 мин. Какое расстояние преодолела лодка за всё время движения, если скорость течения реки 2 км/ч?

III уровень

7. При каком значении a уравнение $3(x-1)+2=(a-3)x$:
а) имеет один корень; б) не имеет корней?

8. Найти значение x, при котором разность выражений $\frac{2(x-2)}{3}$ и $\frac{3(x-3)}{4}$ равна выражению $x+6\frac{1}{3}$.

9. Из посёлка выехал автобус, а через час выехал автомобиль и догнал автобус через 1,5 ч. На каком расстоянии от посёлка автомобиль догнал автобус, если скорость автомобиля на 40 км/ч больше скорости автобуса (автобус в пути не делал остановок)?

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Вклад Диофанта в развитие алгебры.
2. Решение уравнений в Древней Греции.
3. Решение уравнений в Древней Индии.
4. Метод ложного положения в решении уравнений.
5. Старинные задачи и способы их решения.
6. Введение в алгебру в учебнике Л. Ф. Магницкого «Арифметика».

ГЛАВА III

Одночлены и многочлены

Благодаря Ф. Виету в XVI в. математики, астрономы, физики и т. д. получили возможность с помощью букв доказывать обобщённые утверждения.

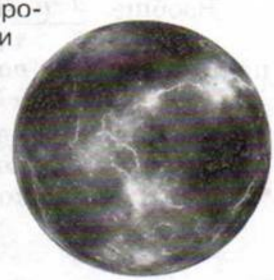
Когда в I главе вы занимались с преобразованиями алгебраических выражений, уже тогда выполняли действия с одночленами и многочленами. Например, выражения $2a$ и $3b^2$ — одночлены, а выражение $2a+3b^2$ — многочлен. Преобразовывая, например, выражение $(3x-5y+1)-(2x+y-4)$ после раскрытия скобок, вы находили, по сути, разность многочленов. Таким образом, начальные навыки в действиях с одночленами и многочленами у вас уже имеются.

В этой главе вы оцените красоту и компактность записи произведения любого количества одинаковых множителей в виде степени. Например, произведение, в котором число 7 взято множителем 10 раз, будете записывать как 7^{10}. В общем виде:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}} = a^n.$$

Изу́чите свойства степеней, упрощающие громоздкие записи, познакомитесь с использованием этих свойств для облегчения практических расчётов. Узнаете, например, что огромную массу Солнца можно записать очень коротко: $2 \cdot 10^{30}$ кг.

После изучения этой главы вы согласитесь с *Сократом (ок. 470 г. до н. э. — 399 г. до н. э.)*, который говорил, что некоторые черты абстрактных понятий свидетельствуют об их происхождении, подобно тому как дети обладают сходством с родителями. Дети, подрастая, становятся опорой престарелым родителям. Точно так же любой раздел математики, достигнув определённой ступени развития, становится полезным средством познания реально существующего мира.



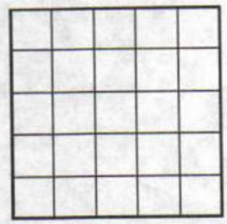
§ 9 Степень с натуральным показателем

В этом параграфе вы узнаете, как кратко записывается произведение любого количества одинаковых множителей. Познакомитесь с представлением любого числа в стандартном виде. Этот вид имеет важное значение для оценки и сравнения различных величин в естествознании и на практике.

Нужно вспомнить:

- умножение чисел с одинаковыми и разными знаками;
- понятия квадрата и куба числа;
- запись натурального числа в виде суммы разрядных слагаемых.

а)



б)

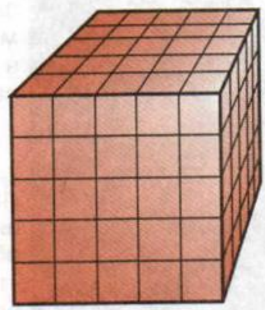


Рис. 4

Посмотрите на рисунок 4. Квадрат со стороной 5 единиц содержит $5 \cdot 5 = 25$ единичных квадратиков. Куб со стороной 5 единиц содержит $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ единичных кубиков.

Вы знаете, что произведение $5 \cdot 5$ обозначают 5^2 (читается: «Пять в квадрате»); произведение $5 \cdot 5 \cdot 5$ обозначают 5^3 (читается: «Пять в кубе»):

$$5 \cdot 5 = 5^2, \qquad 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3.$$

Аналогичные обозначения вводятся для произведения любого числа одинаковых множителей, например:

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5 \text{ раз}} = 3^5, \qquad \underbrace{\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{7}}_{9 \text{ раз}} = \left(\frac{1}{7}\right)^9.$$

Вообще $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} = a^n$. Выражение a^n читается так: «Степень числа a с показателем n» — или коротко: «a в степени n».

! Определение. **Степенью числа a с натуральным показателем n, бо́льшим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a:**

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Степенью числа a с показателем 1 называется само число a:

$$a^1 = a.$$

В выражении a^n число a называют **основанием степени,** число n **называют показателем степени.**

Например: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$, здесь 3 — основание степени, 4 — показатель степени, 81 — значение степени 3^4. Отметим, что основание может быть любым числом, например:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125}; \qquad \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81};$$

$$0{,}2^3 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}008;$$

$$(-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1;$$

$$0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0; \;\; 10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000.$$

Вычисление значения степени называют **действием возведения в степень.** Это — действие третьей ступени. Напомним, что при вычислении значения выражения, не содержащего скобки, сначала выполняют действия третьей ступени, затем второй (умножение и деление) и, наконец, первой (сложение и вычитание).

Задача. Вычислить: $7 \cdot 2^4 - 5 \cdot 3^2$.

► $7 \cdot 2^4 - 5 \cdot 3^2 = 7 \cdot 16 - 5 \cdot 9 = 112 - 45 = 67$. ◁

Запись чисел с помощью степени используется во многих случаях, например для записи натуральных чисел в виде суммы разрядных слагаемых: $245 = 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 = 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5$.

Для записи больших чисел часто применяются степени числа 10. Так, расстояние от Земли до Солнца, примерно равное 150 млн км, записывают в виде $1{,}5 \cdot 10^8$ км; радиус земного шара, приближённо равный 6,37 млн м, — в виде $6{,}37 \cdot 10^6$ м, а расстояние от Земли до ближайшей звезды (альфа Центавра) — в виде $4 \cdot 10^{13}$ км.

Каждое число, большее 10, можно записать в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — натуральное число. Такая запись называется стандартным видом числа.

Например, $4578 = 4{,}578 \cdot 10^3$, $45{,}78 = 4{,}578 \cdot 10$, $103\,000 = 1{,}03 \cdot 10^5$.

С записью чисел в стандартном виде вы будете часто встречаться при изучении физики, химии, при вычислениях на микрокалькуляторе и т. д.

Устные вопросы и задания

1. Что называется степенью числа a с натуральным показателем n, где $n>1$; $n=1$?

2. Прочитать запись: 9^2; x^3; 12^5; $\left(-\frac{2}{7}\right)^9$; b^{10}, c^k.

3. Как называется запись вида a^n? Как в этой записи называется число a; число n?

4. Каким по порядку выполняется действие возведения в степень при вычислении значения выражения, не содержащего скобок?

5. Что такое запись числа в стандартном виде?

Вводные упражнения

1. Вычислить: 1^2; $(-5)^2$; 3^3; $(-4)^3$; 0^3; $0{,}2^2$; $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

2. Найти n, если:

1) $3{,}09\cdot 10^n=309$; 2) $2{,}7364\cdot 10^n=27364$.

Упражнения

133. Вычислить площадь квадрата со стороной, равной:

1) 5 см; 2) $\frac{1}{2}$ м; 3) $3\frac{1}{4}$ км; 4) 2,7 дм.

134. Вычислить объём куба, длина ребра которого равна:

1) 2 м; 2) 3 дм; 3) $\frac{1}{5}$ км; 4) 0,4 м.

135. Записать произведение в виде степени:

1) $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$; 2) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$;

3) $x\cdot x\cdot x\cdot x$; 4) $m\cdot m\cdot m\cdot m\cdot m$;

5) $(x-y)\cdot(x-y)\cdot(x-y)$; 6) $\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}$.

Упростить выражение, используя запись произведения в виде степени (**136—138**).

136. 1) $5\cdot 5\cdot 8\cdot 8\cdot 2\cdot 2$; 2) $6\cdot 6\cdot 7\cdot 7\cdot 3\cdot 3\cdot 3$;

3) $0{,}3\cdot 0{,}3\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}$; 4) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2{,}3\cdot 2{,}3$.

137. 1) $9\cdot 9\cdot 9\cdot a\cdot a\cdot a$; 2) $x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot 3\cdot 3$;

3) $\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}\cdot(x-y)\cdot(x-y)$; 4) $\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot(8a-b)\cdot(8a-b)\cdot(8a-b)$.

138. 1) $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{21 \text{ раз}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{12 \text{ раз}}$; 2) $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{16 \text{ раз}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{31 \text{ раз}}$;

3) $\underbrace{7 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 7}_{n \text{ раз}} \cdot \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{15 \text{ раз}}$; 4) $\underbrace{6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6}_{13 \text{ раз}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ раз}}$.

139. Упростить выражение:

1) $p \cdot p \cdot p + q \cdot q$; 2) $a \cdot a + b \cdot b \cdot b \cdot b$;

3) $a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a$; 4) $x \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot x$.

140. Записать в виде произведения одинаковых множителей:

1) 11^3; 2) $(-1{,}25)^4$; 3) $(2a)^5$; 4) $(a+b)^4$.

Вычислить **(141—145).**

141. 1) 2^3; 2) 3^2; 3) 10^4; 4) 5^3.

142. 1) 1^5; 2) $(-1)^7$; 3) 0^{15}; 4) 0^5.

143. 1) $(-5)^3$; 2) -5^3; 3) $\left(-2\frac{1}{4}\right)^2$; 4) $-\left(2\frac{1}{4}\right)^2$.

144. 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; 2) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$; 3) $\left(1\frac{2}{7}\right)^2$; 4) $\left(2\frac{1}{3}\right)^3$.

145. 1) $2(-3)^2$; 2) $-5(-2)^3$; 3) $-\frac{1}{2}(-4)^2$; 4) $-\frac{2}{3}(-3)^2$.

146. Выполнить действия:

1) $12 \cdot 10^2 - 5^3 \cdot 10$; 2) $9^2 \cdot 2 + 200 \cdot (0{,}1)^2$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 27 + (0{,}1)^5 \cdot 50\,000$; 4) $10^3 : 40 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 128$.

147. Записать в виде суммы разрядных слагаемых число:

1) 12 743; 2) 5 043 201; 3) 13 027 030; 4) 12 350 107.

148. Записать число, представленное суммой разрядных слагаемых:

1) $2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$;
2) $3 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10 + 7$;
3) $7 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 8$;
4) $1 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^3 + 1$.

149. Делится ли на 3; на 5 сумма:

1) $2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 + 6$; 2) $4 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10 + 5$;

3) $7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2$; 4) $5 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 10$?

150. Записать в стандартном виде число:

1) 249; 2) 781; 3) 84 340; 4) 80 005; 5) 3100,2; 6) 127,48.

151. Ребро куба равно k сантиметров. Записать формулы площади его поверхности S и объёма V.

152. Записать:

1) квадрат числа m;
2) куб числа a;
3) квадрат суммы чисел c и 3;
4) сумму квадратов чисел c и 3.

153. Установить, какое из чисел больше:

1) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ или $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$; 2) 2^3 или 3^2;

3) $(-0,2)^3$ или $(-0,2)^2$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ или $\left(\frac{1}{3}\right)^2$.

154. Является ли положительным числом корень уравнения:

1) $3x+(-0,1)^3=(-0,485)^4$;
2) $(-1,415)^2+2x=(-9,15)^3$;
3) $(-7,381)^3-(1-x)=(8,0485)^2$;
4) $(10,381)^3=(-0,012)^5-2x$?

155. Записать в стандартном виде:

1) число молекул газа в 1 см^3 при 0 °C и давлении 760 мм рт. ст., равное 27 000 000 000 000 000 000;

2) число километров, составляющих один парсек (единица длины, принятая в астрономии), если один парсек равен 30 800 000 000 000 км;

3) электронная вычислительная машина может произвести в 1 с 1 000 000 операций.

156. Поверхность земного шара составляет более 510 млн км^2, объём Земли свыше 1000 млрд км^3. Записать данные числа в стандартном виде.

157. В 1 л морской воды в среднем содержится 0,00001 мг золота. Сколько золота содержится в 1 км^3 морской воды?

158. Не производя вычислений, расположить числа:

1) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$; $(-1,8)^2$; $\left(\frac{3}{7}\right)^3$ в порядке убывания;

2) $(-0,4)^3$; $(-1,5)^2$; $\left(\frac{1}{7}\right)^3$; $(-7)^3$ в порядке возрастания.

159. Какой цифрой оканчивается значение выражения:

1) $3^3+4^3+5^3$; 2) $3^3+10^3+18^3$;
3) $21^4+34^4+46^4$; 4) $15^5+26^5+39^5$?

Разговор о важном

Последняя цифра степени числа

Профессор, решая упражнение **159**, я заметил интересную закономерность. Числа, оканчивающиеся на 0, 1, 5 или 6, после возведения в любую степень дают число, оканчивающееся той же цифрой. Если число оканчивается на 4, то последней цифрой после возведения в степень будет 4 или 6.

Ты подметил верные закономерности. Думаю, тебе не составит труда определить, например, последнюю цифру результата возведения числа 2019 в степень 2019.

Попробую решить эту задачу. Очевидно, что последняя цифра значения степени будет такой же, как у 9^{2019}. Понаблюдаю за последними цифрами степеней девятки:

$$9^1 = 9$$
$$9^2 = ...1$$
$$9^3 = ...9$$
$$9^4 = ...1$$
$$9^5 = ...9$$
....

При возведении 9 в чётную степень последней будет цифра 1, а при возведении в нечётную — 9. Так как число 2019 нечётное, то 9^{2019} будет оканчиваться на 9, значит и 2019^{2019} оканчивается на 9.

Молодец! Попробуйте теперь со Светой подметить закономерности в последних цифрах степеней чисел 2, 3, 7 и 8. После этого вы легко определите последние цифры степеней 222^9, 222^{10}, 42^{11}, 192^{12}, 63^{54}, 777^{23}, 888^{888} и др.

А какая-нибудь польза от знания закономерностей с цифрами есть? Какой смысл в решении подобных задач?

Поговорим сначала о пользе математики. Во-первых, математика как никакая другая наука развивает логическое мышление. Во-вторых, всё, что мы обретаем в мире математики, как говорил ещё Гиппократ, может рано или поздно пригодиться в будущем. Ну а если тебе хочется прямо сразу от умения возводить число в степень получить пользу, могу предложить тебе *математический фокус*, которым ты сможешь развлечь и удивить своих родных и друзей.

Попроси кого-нибудь задумать двузначное число, возвести его в третью степень и написать на бумажке результат вычислений. Взглянув на результат, ты сможешь сразу сообщить, какое число было задумано.

Например, тебе показывают число 103 823. Через секунду ты можешь сказать, что было задумано число 47.

Через секунду я точно не скажу, какое число было задумано.

Думаю, что секунд через 5 точно скажешь, если к проведению фокуса подготовишься заранее. А готовиться следует так.

Прежде всего нужно выписать и запомнить кубы чисел от 1 до 10:

$$1^3=1; \quad 2^3=8; \quad 3^3=27; \quad 4^3=64;$$

$$5^3=125; \quad 6^3=216; \quad 7^3=343;$$

$$8^3=512; \quad 9^3=729; \quad 10^3=1000.$$

Замечаем, что *все кубы этих чисел оканчиваются разными цифрами*. При этом кубы чисел 1, 4, 5, 6, 9, 10 оканчиваются той же цифрой, что и возводимое в степень число. У кубов чисел 2, 3, 7, 8 последняя цифра равна разности десяти и числа, которое возводилось в куб. Например, $7^3=343$; последняя цифра 3 может быть получена как $10-7$.

Таким образом, когда тебе сообщили число 103 823, ты сразу можешь определить последнюю цифру задуманного двузначного числа.

Это цифра 7.

Для того чтобы определить первую цифру задуманного числа, поступают следующим образом. Отбрасывают последние три цифры у сообщённого тебе числа и рассматривают оставшееся число, в нашем случае это число 103. Далее определяют, между кубами каких чисел оно находится.

Между кубами чисел 4 и 5.

Меньшее из этих двух чисел даст первую цифру задуманного двузначного числа. Значит, в нашем случае было задумано число 47.

§ 10 Свойства степени с натуральным показателем

В этом параграфе будут обоснованы свойства степеней с натуральными показателями, показано применение этих свойств для упрощения записей выражений, а также для облегчения вычислений при нахождении значений выражений, содержащих степени.

Нужно вспомнить:

- определение степени с натуральным показателем;
- нахождение неизвестных компонентов действий умножения и деления;
- запись числа в стандартном виде.

Возведение в степень обладает несколькими важными свойствами.

Свойство 1

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней складываются.

● По определению степени с натуральным показателем

$$2^2 \cdot 2^3 = \underbrace{(2 \cdot 2)}_{2 \text{ раза}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{3 \text{ раза}} =$$

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ раз}} \times \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ раз}} =$$

по сочетательному закону умножения

$$= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ раз}} =$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(m+n) \text{ раз}} =$$

по определению степени с натуральным показателем

$$= 2^5.$$

$$= a^{m+n}.$$

Итак,

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3}.$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}. \ ○$$

Свойство 2

$$a^m : a^n = a^{m-n},\ m > n,\ a \neq 0.$$

При делении степеней с одинаковыми основаниями (отличными от нуля) основание остаётся прежним, а показатели степеней вычитаются.

● **Найдём**

$2^5 : 2^3$; $5 > 3$.	$a^m : a^n$, где $m > n,\ a \neq 0$.

По первому свойству степени

$2^{5-3} \cdot 2^3 = 2^5$,	$a^{m-n} \cdot a^n = a^m$,

по определению деления

$2^{5-3} = 2^5 : 2^3$.	$a^{m-n} = a^m : a^n$.

Итак, $2^5 : 2^3 = 2^{5-3}$.	$a^m : a^n = a^{m-n},\ m > n,\ a \neq 0$. ○

Свойство 3

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

При возведении степени в степень основание остаётся прежним, а показатели степеней перемножаются.

● По определению степени с натуральным показателем

$(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 =$	$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ раз}} =$
по первому свойству степени $= 2^{3+3} =$	$= a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ раз}}} =$
по определению умножения $= 2^{3 \cdot 2}$.	$= a^{mn}$.
Итак, $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2}$.	$(a^m)^n = a^{mn}$. ○

Свойство 4

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

При возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый множитель.

● По определению степени с натуральным показателем

$$(2\cdot3)^3=\underbrace{(2\cdot3)(2\cdot3)(2\cdot3)}_{3\text{ раза}}= \qquad\Big|\qquad (ab)^n=\underbrace{(ab)(ab)\dots(ab)}_{n\text{ раз}}=$$

по сочетательному и переместительному законам умножения

$$=\underbrace{(2\cdot2\cdot2)}_{3\text{ раза}}\underbrace{(3\cdot3\cdot3)}_{3\text{ раза}}= \qquad\Big|\qquad =\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\text{ раз}}\underbrace{(b\cdot b\cdot\ldots\cdot b)}_{n\text{ раз}}=$$

по определению степени с натуральным показателем

$$=2^3\cdot3^3. \qquad\Big|\qquad =a^n\cdot b^n.$$

Итак, $(2\cdot3)^3=2^3\cdot3^3$. $\qquad\Big|\qquad$ $(ab)^n=a^nb^n$. ○

Свойство 5

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n},\quad b\neq0.$$

При возведении в степень дроби в эту степень возводятся числитель и знаменатель.

● По определению степени с натуральным показателем

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\underbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}_{3\text{ раза}}= \qquad\Big|\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ раз}}=$$

по правилу умножения дробей

$$=\frac{\overbrace{2\cdot2\cdot2}^{3\text{ раза}}}{\underbrace{3\cdot3\cdot3}_{3\text{ раза}}}= \qquad\Big|\qquad =\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\text{ раз}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\text{ раз}}}=$$

по определению степени с натуральным показателем

$$=\frac{2^3}{3^3}. \qquad\Big|\qquad =\frac{a^n}{b^n}.$$

Итак, $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3}$. $\qquad\Big|\qquad$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n},\ b\neq0$. ○

Задача 1. Вычислить: $\dfrac{13^7 \cdot 5^3 \cdot 3^4}{13^6 \cdot 5 \cdot 3^4}$.

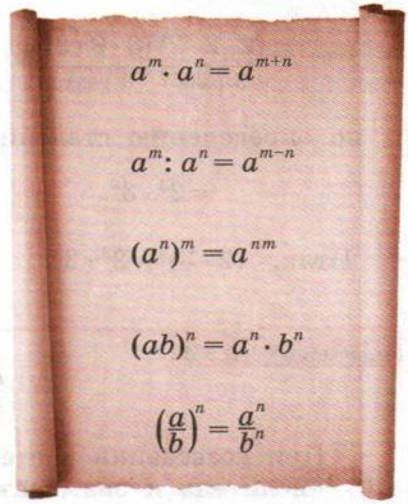
► $\dfrac{13^7 \cdot 5^3 \cdot 3^4}{13^6 \cdot 5 \cdot 3^4} = \dfrac{13^7}{13^6} \cdot \dfrac{5^3}{5} \cdot \dfrac{3^4}{3^4} = 13^{7-6} \cdot 5^{3-1} \cdot 1 = 13 \cdot 25 = 325.$ ◁

Задача 2. Скорость света равна $3 \cdot 10^8$ м/с, расстояние от Солнца до Земли равно $1{,}5 \cdot 10^{11}$ м. За какое время луч света пройдёт расстояние от Солнца до Земли?

► По формуле пути при равномерном движении $s = vt$ получаем $1{,}5 \cdot 10^{11} = 3 \cdot 10^8\ t$, откуда

$$t = \frac{1{,}5 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^8} = 0{,}5 \cdot 10^3 = 500.$$

Ответ. 500 с = 8 мин 20 с. ◁



Устные вопросы и задания

1. Сформулировать свойство:
1) умножения степеней с одинаковыми основаниями;
2) деления степеней с одинаковыми основаниями;
3) возведения степени в степень;
4) возведения произведения в степень;
5) возведения дроби в степень.

2. Прочитать запись:
1) $3^5 \cdot 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$; 2) $b^n : b^k = b^{n-k}$; 3) $(c^k)^m = c^{km}$;
4) $(8b)^n = 8^n \cdot b^n$; 5) $\left(\dfrac{16}{c}\right)^k = \dfrac{16^k}{c^k}$.

3. Привести числовые примеры применения каждого из свойств действий со степенями.

Вводные упражнения

1. Вычислить:
1) 2^5; 2) 3^4; 3) 4^3; 4) 2^6;
5) $2^3 \cdot 3^3$; 6) $3^2 \cdot 2^2$; 7) $\left(-1\dfrac{2}{3}\right)^4$; 8) $\left(-1\dfrac{1}{4}\right)^3$.

2. Записать в стандартном виде число:
1) 65 800; 2) 372 000; 3) 1 050 000; 4) 20 900 000.

3. Решить уравнение:

1) $5^3 \cdot x = 5^4$; 2) $x \cdot 3 = 3^3$; 3) $2^5 : x = 2^4$; 4) $x : 4 = 4^3$.

Упражнения

Записать произведение в виде степени **(160—162)**.

160. 1) c^3c^2; 2) a^3a^4; 3) $\left(\frac{1}{2}a\right)^7\left(\frac{1}{2}a\right)$; 4) $(3b)(3b)^6$.

161. 1) $2^3 2^2 2^4$; 2) $3^2 3^5 3^3$; 3) $(-5)^6(-5)^3(-5)^4$; 4) $(-6)^3(-6)^2(-6)^7$.

162. 1) $(-2{,}5a)^3(-2{,}5a)^8$; 2) $\left(-\frac{5x}{6}\right)^5\left(-\frac{5x}{6}\right)^7$;

3) $(x-a)^7(x-a)^{10}$; 4) $(n+m)^{15}(n+m)^5$.

Записать в виде степени с основанием 2 **(163—164)**.

163. 1) 32; 2) 128; 3) 1024; 4) 256; 5) $2^5 \cdot 128$; 6) $32 \cdot 64$.

164. 1) $64 : 4$; 2) $32 : 2^3$; 3) $8 : 2^2$; 4) $256 : 32$; 5) $\frac{2^7}{2^5}$; 6) $\frac{2^{10}}{2}$.

Записать в виде степени с основанием 3 **(165—166)**.

165. 1) 81; 2) 27; 3) 729; 4) 243; 5) $3^6 \cdot 81$; 6) $243 \cdot 27$.

166. 1) $3^4 : 9$; 2) $27 : 3^2$; 3) $243 : 27$; 4) $81 : 9$; 5) $\frac{3^{15}}{3}$; 6) $\frac{3^8}{3^4}$.

Записать частное в виде степени **(167—168)**.

167. 1) $\left(-\frac{9}{7}\right)^8 : \left(-\frac{9}{7}\right)^5$; 2) $\left(\frac{1}{17}\right)^{18} : \left(\frac{1}{17}\right)^{17}$; 3) $x^{21} : x^7$; 4) $d^{24} : d^{12}$.

168. 1) $\left(\frac{3y}{4}\right)^6 : \left(\frac{3y}{4}\right)^2$; 2) $(2a)^5 : (2a)^3$;

3) $(a-b)^7 : (a-b)^5$; 4) $(m+n)^{10} : (m+n)^5$.

Вычислить **(169—170)**.

169. 1) $\frac{2 \cdot 3^3}{3^2}$; 2) $\frac{2^3 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3}$; 3) $\frac{3^5 \cdot 3^{10}}{3^6 \cdot 3^7}$; 4) $\frac{5^8 \cdot 5^7}{5^4 \cdot 5^9}$.

170. 1) $\frac{8 \cdot 3^3}{2 \cdot 3^2}$; 2) $\frac{11^3 \cdot 4^2}{11^2 \cdot 4}$; 3) $\frac{2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^3}{2^5 \cdot 2^7}$; 4) $\frac{3^6 \cdot 3^3}{3^3 \cdot 3 \cdot 3}$.

171. Решить уравнение:

1) $x : 3^2 = 3^3$; 2) $x : 2^4 = 2^2$; 3) $x \cdot 2^6 = 2^8$;

4) $x \cdot 3^5 = 3^8$; 5) $5^5 \cdot x = 5^7$; 6) $4^6 \cdot x = 4^8$.

Записать в виде степени с основанием a **(172—173).**

172. 1) $(a^5)^6$; 2) $(a^8)^7$; 3) $(a^2)^5 a^8$;
4) $a^5 (a^2)^3$; 5) $a^7 a^5 (a^2)^4$; 6) $a^3 (a^3)^3 a^3$.

173. 1) $(a^7)^5 : (a^3)^4$; 2) $(a^6)^4 : (a^3)^5$; 3) $\frac{(a^3)^5 a^4}{a^{12}}$; 4) $\frac{a^8 (a^4)^4}{(a^3)^4}$.

174. Найти значение выражения:
1) $\frac{(c^2)^3 c^8}{(c^3)^4}$ при $c=-3$; $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{d^3 d^5}{(d^2)^3}$ при $d=\frac{1}{4}$; -10.

175. Представить 2^{20} в виде степени с основанием:
1) 2^2; 2) 2^4; 3) 2^5; 4) 2^{10}.

Записать в виде степени с показателем 2 **(176—177).**

176. 1) 0,01; 2) $\frac{25}{36}$; 3) $1\frac{9}{16}$; 4) 0,0004.

177. 1) a^4; 2) b^6; 3) c^{10}; 4) x^{20}.

Возвести в степень произведение **(178—181).**

178. 1) $(3 \cdot 5)^4$; 2) $(7 \cdot 6)^5$; 3) $(1{,}3 \cdot 8)^5$; 4) $\left(4 \cdot \frac{1}{7}\right)^3$.

179. 1) $(ax)^7$; 2) $(6y)^6$; 3) $(2{,}5cd)^2$; 4) $(3nm)^3$.

180. 1) $(xy^3)^2$; 2) $(a^2b)^3$; 3) $(2b^4)^5$; 4) $(0{,}1c^3)^2$.

181. 1) $(10n^2m^3)^4$; 2) $(8a^4b^7)^3$; 3) $(-2{,}3a^3b^4)^2$; 4) $(-2nm^3)^4$.

182. (Устно.) Во сколько раз увеличится площадь квадрата, если длину каждой стороны увеличить в 2 раза; 3 раза; 10 раз?

183. (Устно.) Какую часть объёма куба составляет куб, ребро которого составляет $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{10}$ часть ребра первого куба?

184. Записать в виде степени произведения выражение:
1) $4^5 \cdot x^5$; 2) $2^3 \cdot a^3$; 3) $5^4 \cdot 7^4$; 4) $2^5 \cdot 3^5$;
5) $16a^2$; 6) $81k^2$; 7) $9^7 n^7 m^7$; 8) $15^3 a^3 b^3$.

Записать выражение в виде степени с показателем 2 **(185—186).**

185. 1) $c^2 d^{10}$; 2) $a^4 b^6$; 3) $25a^4$; 4) $81m^2$.

186. 1) $a^4 b^6 c^2$; 2) $x^2 y^4 z^8$; 3) $49x^8 y^6$; 4) $100c^8 x^6$.

Вычислить **(187—189).**

187. 1) $(0{,}25)^7 \cdot 4^7$; 2) $\left(\frac{4}{5}\right)^{17} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{17}$;
3) $(-0{,}125)^{11} \cdot 8^{11}$; 4) $(-0{,}2)^5 \cdot 5^5$.

188. 1) $\frac{2^8 \cdot 3^8}{6^5}$; 2) $\frac{4^5 \cdot 3^5}{12^3}$; 3) $\frac{10^5}{2^5 \cdot 5^5}$; 4) $\frac{14^4}{2^3 \cdot 7^3}$.

189. 1) $\frac{81 \cdot 27^3}{3^8}$; 2) $\frac{2^8 \cdot (7^2)^4}{14^7}$; 3) $\frac{16^2 \cdot 3^5}{12^4}$; 4) $\frac{2^9 \cdot (2^2)^5}{(2^5)^3}$.

Возвести в степень дробь **(190—192).**

190. 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; 2) $\left(-\frac{5}{7}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{3}{a}\right)^2$; 4) $\left(\frac{b}{8}\right)^3$.

191. 1) $\left(\frac{a}{2b}\right)^4$; 2) $\left(\frac{3b}{5c}\right)^4$; 3) $\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^7$; 4) $\left(\frac{5^2}{7^4}\right)^3$.

192. 1) $\left(\frac{a+b}{3}\right)^3$; 2) $\left(\frac{7}{2+c}\right)^2$; 3) $\left(\frac{m+n}{m-n}\right)^5$; 4) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^7$.

Записать в виде степени **(193—194).**

193. 1) $\frac{3^7}{4^7}$; 2) $\frac{2^5}{5^5}$; 3) $\frac{m^3}{2^3}$; 4) $\frac{5^7}{a^7}$.

194. 1) $\frac{(2a)^2}{(3b)^2}$; 2) $\frac{(4x)^4}{(3y)^4}$; 3) $\frac{1}{-8}$; 4) $\frac{-1}{27}$.

Пусть n, m, k — натуральные числа. Представить выражение в виде степени **(195—198).**

195. 1) $4^n \cdot 4^5$; 2) $3^8 \cdot 3^n$; 3) $c^{28} \cdot c^n$; 4) $a^n \cdot a^{13}$.

196. 1) $y^n \cdot y^m$; 2) $b^n \cdot b^k$; 3) $5^{4k} \cdot 5^4$; 4) $3^{3n} \cdot 3^{3m}$.

197. 1) $2^{2n} : 2^n$; 2) $2^{3n} : 2^{2n}$; 3) $2^{4n+1} : 2^{2n}$; 4) $2^{4n+5} : 2^{n+2}$.

198. 1) $3^{4n} : 3^{3n}$; 2) $3^{6n} : 3^{2n}$; 3) $3^{n+3} : 3^{n+1}$; 4) $3^{n+6} : 3^{n+2}$.

199. При каком значении n верно равенство:

1) $3^n = 9$; 2) $128 = 2^n$; 3) $(2^2)^n = 16$; 4) $(3^n)^2 = 81$?

Вычислить **(200—201).**

200. 1) $\frac{6^{12} \cdot 4^{12}}{3^{12} \cdot 8^{12}}$; 2) $\frac{4^{10} \cdot 3^{10}}{2^{10} \cdot 6^{10}}$; 3) $\frac{15^4}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 25}$; 4) $\frac{4^{16}}{8^{10}}$.

201. 1) $\left(\frac{35}{48}\right)^3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^3 \cdot \left(1\frac{3}{5}\right)^2$; 2) $\left(\frac{14}{15}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot (2,5)^3$;

3) $\left(\frac{5^3}{6^2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^7$; 4) $\left(\frac{7^4}{15^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^5$.

202. Найти шестую степень числа, если;

1) его квадрат равен 0,25; 400; $11\frac{1}{9}$;

2) его куб равен 0,008; 125; $3\frac{3}{8}$; $37\frac{1}{27}$.

203. 1) Масса Земли равна $6 \cdot 10^{24}$ кг; масса Солнца — $2 \cdot 10^{30}$ кг. Во сколько раз масса Земли меньше массы Солнца?
2) Вычислить приближённо, сколько лет луч света идёт от Земли до Сириуса, если расстояние от Земли до звезды Сириус равно 83 000 000 000 000 км.

204. Вычислить с помощью микрокалькулятора:
1) 3^{10}; 2) 5^9; 3) $(2{,}3)^4$; 4) $(1{,}3)^5$.

205. Какое из чисел больше:
1) 54^4 или 21^{12}; 2) 10^{20} или 20^{10};
3) 100^{20} или 9000^{10}; 4) 6^{20} или 3^{40}?

206. Вычислить:
1) $\dfrac{2^5 \cdot 5^{22} - 2 \cdot 5^{21}}{25^{10}}$; 2) $\dfrac{5 \cdot 2^{32} - 4 \cdot 2^{30}}{4^{16}}$;

3) $\dfrac{(4 \cdot 3^{22} + 7 \cdot 3^{21}) \cdot 57}{(19 \cdot 27^4)^2}$; 4) $\dfrac{5(3 \cdot 7^{15} - 19 \cdot 7^{14})}{7^{16} + 3 \cdot 7^{15}}$.

Диалог об истории

Варга, гхана и шахматы

Профессор, почему a^2 читают как «a в квадрате», a^3 — как «a в кубе»? Возникают ассоциации с геометрией.

Помните, я говорил, что математика в древности во многом развивалась из потребностей земледелия, а значит, из расчётов и геометрических соображений. Учёные Древней Греции представляли величины не числами или буквами, а отрезками, которые обозначали буквами. Вместо произведения ab назывался и рассматривался «прямоугольник, содержащий между отрезками a и b». Вместо $a \cdot a$ — «квадрат на отрезке a», вместо $a \cdot a \cdot a$ — «куб на ребре a». Со временем стали говорить: «a в квадрате» и «a в кубе».

У известного вам Диофанта имелись специальные обозначения для первых шести степеней неизвестного. Первые признаки понимания и использования *свойств степеней* обнаруживаются, например, у древних индийских учёных в самих названиях степеней.

x^1 — S
x^2 — Δ^{Υ}
x^3 — K^{Υ}
x^4 — $\Delta^{\Upsilon}\Delta$
x^5 — ΔK^{Υ}
x^6 — $K^{\Upsilon}K$

А разве такое может быть?

Может. Сама посуди. Индусы очень давно пользовались степенями с натуральными показателями до 9-й включительно. А для названий этих степеней им хватало комбинаций трёх слов: *ва* (2-я степень, от слова *варга* — квадрат), *гха* (3-я степень, от слова *гхана* — тело, куб), а также слова *гхата* (указывающего на сложение показателей). Если два или три слова писались последовательно, это означало умножение показателей. Например, запись *ва-гха* означала 6-ю степень $(2 \cdot 3)$, запись же *ва-гха-гхата* означала 5-ю степень $(2 + 3)$, а запись *гха-гха* — 9-ю степень $(3 \cdot 3)$.

Действительно, похоже, что индусы знали, зачем и когда складываются и умножаются показатели.

К тому же индусы дали миру много выдающихся учёных. Об одном из них я хочу рассказать вам замечательную *легенду*.

Когда индийский царь Шерам узнал об удивительной игре в шахматы, он приказал позвать к себе её изобретателя, учёного Сету. Царь пообещал наградить бедного учёного, чем тот сам пожелает. Сета попросил в награду за своё изобретение столько пшеничных зёрен, сколько получится, если на первую клетку шахматной доски положить одно зерно, на вторую в 2 раза больше, т. е. 2 зерна, на третью ещё в 2 раза больше, т. е. 4 (2^2), на четвёртую ещё в 2 раза больше, т. е. 8 (2^3) зерён, и т. д. до 64-й клетки. Царь подивился такой скромности учёного и велел слугам принести Сете мешок требуемой пшеницы. Слуги ушли, но выполнить просьбу Сеты они не смогли.

Почему же?

Давайте подсчитаем, сколько всего зёрен должны были выдать Сете в награду за изобретение шахмат. Нужно найти сумму

$$S = \underbrace{1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}}_{\text{64 слагаемых}}.$$

Можно найти точное значение этой суммы. Но это займёт очень много времени. А можно попробовать оценить величину этой суммы, сравнив её с каким-нибудь числом. Очевидно, что сумма S больше, чем каждое из слагаемых, её составляющих. Вот и давайте считать, что S больше последнего слагаемого 2^{63}. Найдём значение 2^{63}, применяя изученные свойства степеней:

$$2^{63} = 2^{60} \cdot 2^3 = (2^{10})^6 \cdot 8 = 1024^6 \cdot 8 = (1024^2)^3 \cdot 8 = (1\,048\,576)^3 \cdot 8 =$$
$$= 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808.$$

Может быть, такое количество зёрен действительно уместится в мешке? Ведь зерно очень маленькое по размеру.

Известно, что куб, ребро которого равно 1 м, (так называемый кубический метр), вмещает около 15 млн зёрен пшеницы. А теперь подсчитайте, сколько таких кубических метров, заполненных зёрнами, нужно поставить друг на друга, чтобы в них поместилось требуемое количество зёрен. Какова будет высота такой «башни»? Для сравнения напомню, что расстояние от Земли до Солнца равно 150 млн км.

§ 11 Одночлен. Стандартный вид одночлена

В этом параграфе вы узнаете, какие выражения называются одночленами. Поймёте, что уже встречались с простейшими одночленами и даже складывали подобные одночлены. Познакомитесь с самой компактной и удобной для приведения подобных одночленов формой их записи.

Нужно вспомнить:

- переместительный и сочетательный законы умножения;
- понятие степени с натуральным показателем;
- свойства степеней;
- действия со степенями;
- нахождение числовых значений алгебраических выражений.

При решении различных задач часто встречаются алгебраические выражения вида ab, $\frac{1}{2}xyz$, $3a^2b$. Например, вместимость рефрижератора, размеры которого указаны на рисунке 5, равна $3abc$. Выражение $3abc$ является произведением четырёх множителей, из которых первый — число, а три следующих — буквы a, b, c.

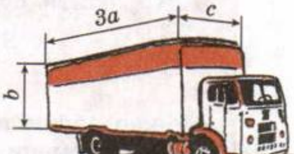


Рис. 5

! Определение. Множители, записанные с помощью цифр, называются **числовыми множителями**, а множители, обозначенные буквами, — **буквенными множителями**.

Произведение числовых и буквенных множителей называют **одночленом**.

Например, одночленами являются выражения

$$abc;\ (-4)\,a\cdot 3ab;\ \frac{1}{4}a(-0{,}3)bab.$$

Так как произведение равных множителей можно записать в виде степени с натуральным показателем, то степень числа и произведение степеней также называют одночленами. Например, одночленами являются выражения

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2;\ (-7)^3;\ x^5;\ 4a^2;\ \left(-\frac{1}{2}\right)a^2b.$$

Так как каждое число можно записать в виде произведения этого числа на единицу, то выражения вида a, 2, $\frac{3}{8}$ также считают одночленами.

Задача. Найти значение одночлена $16ac\,(0{,}5)\,a\,(0{,}25)\,b$ при

$$a=\frac{1}{3},\ b=34,\ c=\frac{9}{17}.$$

► Если подставить данные значения букв в одночлен, то придётся вычислить произведение

$$16\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{17}\cdot 0{,}5\cdot\frac{1}{3}\cdot 0{,}25\cdot 34.$$ ◁

Вычисления можно провести короче, если сначала упростить данный одночлен, используя переместительный и сочетательный законы умножения:

$$16ac\,(0{,}5)\,a\,(0{,}25)\,b=(16\cdot 0{,}5\cdot 0{,}25)\,(a\cdot a)\,bc=2a^2bc.$$

Находим значение одночлена $2a^2bc$ при $a=\frac{1}{3}$, $b=34$, $c=\frac{9}{17}$:

$$2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot 34\cdot\frac{9}{17}=\frac{2\cdot 34\cdot 9}{9\cdot 17}=4.$$

При решении задачи данный одночлен был записан в более простом виде: $2a^2bc$. В этом одночлене содержится только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и степени с различными буквенными основаниями. Такие одночлены называют **одночленами стандартного вида**.

Любой одночлен можно записать в стандартном виде. Для этого нужно:

1) перемножить все числовые множители и поставить их произведение на первое место;
2) затем произведения степеней с одинаковыми основаниями записать в виде степени.

Буквенные множители чаще всего располагают в алфавитном порядке, хотя это не обязательно. Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют **коэффициентом** этого **одночлена.**

Например, коэффициент одночлена $2a$ равен 2, коэффициент одночлена $\frac{5}{6}ab^2$ равен $\frac{5}{6}$, коэффициент одночлена $(-7)\,a^2b^3c$ равен (-7). В последнем случае одночлен можно записать без скобок:

$$(-7)\,a^2b^3c = -7a^2b^3c.$$

Коэффициент, равный 1, обычно не записывают, так как от умножения на единицу число не меняется. Например, $1 \cdot abc^2 = abc^2$, т. е. коэффициент одночлена abc^2 равен единице. Если коэффициент равен (-1), то и в этом случае единицу и скобки можно не писать, а оставить только знак «–». Например, $(-1)\,abc = -abc$, т. е. коэффициент одночлена $-abc$ равен -1.

В одночлене $5a^2bc^4$ сумма показателей степеней всех букв равна 7. Эту сумму называют степенью одночлена $5a^2bc^4$.

! Определение. **Степенью одночлена** называют сумму показателей степеней всех входящих в него буквенных множителей. Если одночлен не содержит буквенных множителей (является числом), то его степень считают равной нулю.

Например, степени одночленов $-\frac{1}{2}xy^2$ и $6a^3$ равны 3, а степень одночлена 23 равна 0.

Устные вопросы и задания

1. Что называется одночленом?
2. Какие одночлены называют одночленами стандартного вида?
3. Что называют коэффициентом одночлена?
4. Назвать коэффициент одночлена: $-0{,}25m^5n^6$; qp^3; $-a^7c^3$.
5. Что называют степенью одночлена?

Вводные упражнения

1. Вычислить удобным способом:
   1) $4 \cdot 27 \cdot 25$; 2) $125 \cdot 73 \cdot 8$; 3) $8 \cdot \frac{1}{6} \cdot 125 \cdot 12$; 4) $\frac{2}{3} \cdot 25 \cdot \frac{3}{2} \cdot 4$.
2. Записать в виде степени:
   1) $a \cdot a^5$; 2) $b^3 \cdot b^4$; 3) $x^5 \cdot x \cdot x^7$; 4) $y \cdot y^4 \cdot y^{10}$.

Упражнения

207. Записать в виде алгебраического выражения:

1) произведение куба числа m и числа p;
2) утроенное произведение квадрата числа a и числа b;
3) число секунд в t часах;
4) число сантиметров в n метрах.

208. Найти числовое значение одночлена:

1) $0{,}5b^2$ при $b=-4$; 2) $3abc$ при $a=2$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{3}$.

209. Среди одночленов $10{,}2a^2b^2c$; $-7{,}3ab^2c$; $17a^2bca$; $-2{,}6ab^2c^3$; $-m$; $3ab$; $-28a^2b^2c^2$; $3aabc$; $-2a\cdot\frac{1}{2}b$; $-m^4m$; $m\cdot 2$; $17a^2b^2c^2$ указать:

1) одночлены стандартного вида;
2) одночлены, отличающиеся только коэффициентами.

210. Записать одночлен в стандартном виде и определить его степень:

1) $3m^4m$; 2) z^5z^5z; 3) $-ab\cdot 5$;
4) $(-m)(-m^3)$; 5) $5^2pq^2(-4)^2qp$; 6) $2^3qp^2(-3)^2pq$.

211. Записать одночлен в стандартном виде и найти его числовое значение:

1) $ac\cdot 12c$ при $a=-\frac{1}{3}$, $c=-\frac{1}{6}$;
2) $\frac{1}{6}a\cdot 8b^2\cdot\frac{3}{4}ba^3$ при $a=-2$, $b=\frac{1}{2}$.

212. Длина окружности радиуса R выражается формулой $C=2\pi R$; площадь круга радиуса R выражается формулой $S=\pi R^2$ ($\pi\approx 3{,}14$). С помощью микрокалькулятора вычислить:

1) S при $R=1{,}3$; 2) R при $C=122{,}46$; 3) S при $C=62{,}8$.

Разговор о важном

О стандарте

Профессор, а почему одночлены, в которых каждая буква встречается по одному разу, называют стандартными? Почему их не назвали, например, *краткими* или *удобными*?

Слово *стандарт* произошло от английского слова *standard* — норма, образец, принимаемый за исходный для сопоставления с ним других подобных объектов. Думаю, теперь ты и сам сможешь ответить на свой вопрос. А в следующий раз, когда у тебя возникнет вопрос по названию того или иного предмета, понятия, явления, советую посмотреть в словаре — от какого слова происходит это название и что оно означает.

§ 12 Умножение одночленов

В параграфе рассматриваются два действия с одночленами: умножение и возведение в натуральную степень. Результаты этих действий с помощью переместительного и сочетательного законов умножения, а также с помощью свойств степеней приводятся к одночлену стандартного вида.

Нужно вспомнить:

- свойства степеней;
- переместительный и сочетательный законы умножения.

Задача. Объём прямоугольного параллелепипеда, имеющего длину a, ширину b и высоту c, вычисляется по формуле $V = abc$. Каким будет объём V_1 нового параллелепипеда, если длину данного увеличить в 5 раз, ширину — в $2n$ раз, высоту — в $3n$ раз?

▶ Измерения нового параллелепипеда: длина $5a$, ширина $2nb$, высота $3nc$. Его объём равен $V_1 = (5a) \cdot (2nb) \cdot (3nc)$. ◁

Выражение $(5a) \cdot (2nb) \cdot (3nc)$ является произведением трёх одночленов: $5a$, $2nb$, $3nc$. По свойствам умножения чисел можно записать следующее равенство:

$$(5a) \cdot (2nb) \cdot (3nc) = 5a \cdot 2nb \cdot 3nc = (5 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (annbc) = 30n^2abc.$$

В результате умножения одночленов получается одночлен. Его можно упростить, записав в стандартном виде. Например:

$$(3a^2b^3c) \cdot (4ab^2) = 3a^2b^3c \cdot 4ab^2 = 12a^3b^5c.$$

$$(3a^2b^3c) \cdot (4ab^2) = 12a^3b^5c$$

Рассмотрим произведение двух или нескольких одинаковых одночленов, т. е. степень одночлена, например $(5a^3b^2c)^2$. Так как одночлен $5a^3b^2c$ является произведением множителей 5, a^3, b^2, c, то по свойству возведения произведения в степень имеем: $(5a^3b^2c)^2 = 5^2 (a^3)^2 (b^2)^2 c^2 = 25a^6b^4c^2$.

Точно так же $(2pq^2)^3 = 2^3p^3 (q^2)^3 = 8p^3q^6$.

В результате возведения одночлена в натуральную степень снова получается одночлен.

Устные вопросы и задания

1. Дан прямоугольник со сторонами a и b. Какой будет площадь нового прямоугольника, если:
1) сторону a увеличить в k раз;
2) сторону a увеличить в k раз, а сторону b — в m раз?

2. Сформулировать алгоритм приведения к одночлену стандартного вида произведения двух одночленов.

3. Что нужно сделать, чтобы возвести одночлен в степень?

Вводные упражнения

1. Записать в виде степени:
1) m^4m^5; 2) a^8a; 3) xx^{10}; 4) y^2y^9;
5) bb^4b^3; 6) n^5nn^6; 7) $a^3a^4a^5$; 8) k^7k^8k.

2. Записать в стандартном виде одночлен:
1) $-2x^2y\frac{1}{4}xy^5$; 2) $100a^6b^3a\left(-\frac{2}{5}\right)a^2b^4$;
3) $0{,}125nm^3(-8)k^2nm^5$; 4) $-1{,}5a^5b^3c^2\cdot 6ac^7$.

Упражнения

Выполнить умножение одночленов **(213—215)**.

213. 1) $(2p)(-3c^2)$; 2) $(-5m^2)(-7n)$; 3) $(4a^2)(6a^3)$; 4) $\left(-\frac{1}{2}b^3\right)(8b^2)$.

214. 1) $(3a^2b^5c)(6a^3bc^2)$; 2) $(7a^5b^2c)(-3ab^4c)$;
3) $\left(\frac{2}{3}a^2b^3x\right)\left(\frac{3}{4}a^3bx^2\right)$; 4) $\left(-\frac{3}{2}a^3xy^3\right)\left(\frac{3}{4}ax^2y\right)$.

215. 1) $\left(-\frac{1}{3}m^2\right)(-24n)(4nm)$; 2) $(-18n)\left(-\frac{1}{6}m^2\right)(-5nm)$;
3) $\left(\frac{1}{3}ay^3\right)\left(\frac{3}{4}x^2y\right)(0{,}2a^3x)$; 4) $(-13a^2bc)(-5ab^2c)(-0{,}4abc^3)$.

Возвести одночлен в степень **(216—218)**.

216. 1) $(2a)^3$; 2) $(5b)^2$; 3) $(3b^2)^4$; 4) $(2a^3)^2$.

217. 1) $(-2a^2b)^3$; 2) $(-a^2bc)^5$; 3) $(-3x^3y)^2$; 4) $(-2x^2y^3)^4$.

218. 1) $\left(\frac{1}{2}nm^2\right)^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}n^2m^2\right)^4$; 3) $(-0{,}1a^3b^3)^3$; 4) $(0{,}4a^3b^2)^2$.

Выполнить действия (219—220).

219. 1) $(-2a)^2(-3a)$; 2) $(-a)^3(2a)$;
3) $(-0,2bc^2)^2(20cx^2)$; 4) $(-0,1ab^2c)^2(100by^2)$.

220. 1) $\left(-1\frac{3}{5}x^3y^2\right)\left(-\frac{1}{2}c^2x^2\right)^3$; 2) $\left(2\frac{1}{4}x^3y\right)\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^2$;
3) $(-3bc^2)^3(2ab^2)^2$; 4) $(-2a^2b)^2(-a^2b^3)^3$;
5) $\left(\frac{5}{6}m^2n\right)^2(6mn^2)^2$; 6) $\left(\frac{3}{7}m^3n\right)^2(-7mn^2)^3$.

221. Выполнить умножение одночленов и найти значение полученного выражения:
1) $\frac{1}{3}a^2\cdot 3a^2b$ при $a=-2$, $b=\frac{5}{7}$;
2) $\frac{2}{5}mn\cdot 10n^2$ при $m=0,8$, $n=4$.

222. Найти площадь прямоугольника со сторонами:
1) $\frac{1}{5}a$ и $10b$; 2) $\frac{3}{7}x$ и $14y$.

223. Найти объём прямоугольного параллелепипеда с рёбрами:
1) $0,25m$, $1\frac{1}{3}n$ и $6mn$; 2) $0,1a$, $2b^2$ и $5ab$.

224. Записать одночлен в виде квадрата другого одночлена:
1) $9a^2$; 2) $16x^4$; 3) $25a^2b^4$;
4) $81x^6y^2$; 5) $36x^{10}y^4$; 6) $1,21a^8b^4$.

225. Записать одночлен в виде куба другого одночлена:
1) $27a^3$; 2) $8b^6$; 3) $27a^3b^{12}$;
4) $8a^9b^6$; 5) $\frac{1}{125}x^9y^{12}$; 6) $-0,027x^3y^{15}$.

226. При каком значении n верно равенство:

1) $(2a)^n=32a^5$; 2) $\left(-\frac{1}{3}x^2y\right)^n=-\frac{1}{27}x^6y^3$;

3) $(0,2y^2)^n\cdot 100=4y^4$; 4) $\left(3\frac{1}{3}m^4\right)^n\cdot 0,001=\frac{1}{27}m^{12}$;

5) $(0,3ab^3)^n\cdot\frac{1}{0,09}=a^2b^6$; 6) $\left(-\frac{1}{2}b^2c\right)^n=\frac{1}{64}b^{12}c^6$?

Диалог об истории

Рукописи не горят?

Профессор, откуда известно, с помощью каких букв и знаков учёные записывали свои труды много веков назад? Ведь книгопечатания тогда ещё не было.

В древние времена писали на глиняных пластинках или папирусах. На бумаге стали писать лишь после того, как её изобрели во II в. до н. э.

История пощадила часть этих замечательных рукописей, хотя *Александрийская библиотека*, где находились ценнейшие рукописные книги, в первые века нашей эры сильно пострадала от пожаров. До нас дошли лишь некоторые фрагменты александрийских папирусов. Древнегреческие математические трактаты неоднократно переписывались и переводились на арабский и латинский языки. Современным учёным-филологам и математикам удалось восстановить и перевести рукописи, относящиеся ещё к IV в. до н. э. Благодаря этому мы сегодня имеем изданные типографским способом и на электронных носителях труды Евклида, *Архимеда*, *Герона*, Диофанта, Пифагора и других замечательных учёных античности.

§ 13 Многочлены

В этом параграфе вы познакомитесь с одним из основных понятий алгебры — многочленом. Исследование многочленов составляет основу теории решения различных уравнений — важнейшей содержательной линии курса алгебры.

Нужно вспомнить:

- понятие одночлена;
- запись одночлена в стандартном виде;
- понятие алгебраической суммы;
- решение линейных уравнений с одним неизвестным.

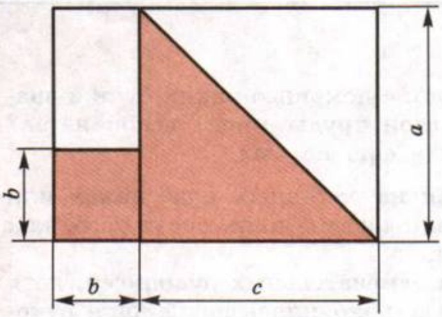
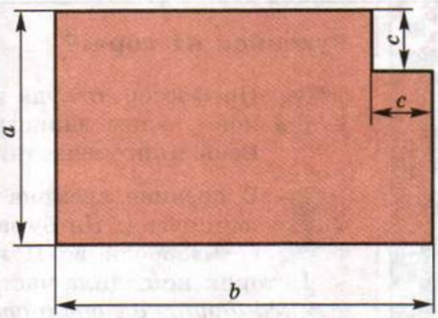
В алгебре часто рассматриваются алгебраические выражения, представляющие собой сумму или разность одночленов. Например, площадь закрашенной части фигуры, изображённой на рисунке 6, a, а)  б) 

Рис. 6

равна $\frac{1}{2}ac+b^2$, а площадь фигуры, изображённой на рисунке 6, б, равна $ab-c^2$. Выражение $\frac{1}{2}ac+b^2$ — сумма двух одночленов $\frac{1}{2}ac$ и b^2. Выражение $ab-c^2$ — разность двух одночленов ab и c^2 или сумма одночленов ab и $(-c^2)$.

Эти выражения являются алгебраическими суммами одночленов. Такие выражения называют многочленами.

! Определение. **Многочленом** называется алгебраическая сумма нескольких одночленов.

Одночлены, из которых составлен многочлен, называют **членами этого многочлена**. Например, членами многочлена $5nm^2-3m^2k-$ $-7nk^2+4nm$ являются одночлены $5nm^2$, $-3m^2k$, $-7nk^2$, $4nm$.

Многочлен, состоящий из двух членов, называют двучленом; многочлен, состоящий из трёх членов, называют трёхчленом.

Примеры двучленов: a^2-b^2, $5ac+4c$.

Примеры трёхчленов: $a+2b-3c$, $\frac{1}{2}-bc+3ab$.

Одночлен считают многочленом, состоящим из одного члена.

Если некоторые члены многочлена записаны не в стандартном виде, то этот многочлен можно упростить, записав все его члены в стандартном виде.

Задача. Упростить многочлен $2a\cdot 4b-5abac+9bc\cdot\frac{1}{3}c$.

► Запишем все члены данного многочлена в стандартном виде:

$$2a\cdot 4b=8ab,\quad -5abac=-5a^2bc,\quad 9bc\cdot\frac{1}{3}c=3bc^2.$$

Следовательно, $2a\cdot 4b-5abac+9bc\cdot\frac{1}{3}c=8ab-5a^2bc+3bc^2$. ◁

Членами многочлена $8ab - 5a^2bc + 3bc^2$ служат одночлены второй степени, четвёртой и третьей степеней. Наибольшую из этих степеней, четвёртую, называют степенью данного многочлена.

! Определение. **Степенью многочлена** называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов.

Например, многочлен $-7x^6yz + 3x^2y^3 + 1$ — многочлен восьмой степени, многочлен $5a - 6$ — многочлен первой степени.

Устные вопросы и задания

1. Что называют многочленом?
2. Что называют членами многочлена?
3. Как называют многочлен, состоящий из двух членов; трёх членов?
4. Как называют многочлен, состоящий из одного члена?
5. Перечислить все члены многочлена $3xy^2 - 2x^2y - \frac{1}{2}$.
6. Что называют степенью многочлена?

Вводные упражнения

1. Записать в стандартном виде одночлен:

   1) $2{,}5a^3b(-2)a^2b^7$; 2) $-\frac{2}{3}x^6yz^5\frac{6}{7}yz^4$.
2. Записать алгебраическую сумму чисел:

   1) -21, 36 и -4; 2) 47, -3 и 15.
3. Решить уравнение: 1) $-\frac{1}{2}x + 3 = 1$; 2) $3x - 5 = 5x + 3$.

Упражнения

227. Составить многочлен из одночленов:

1) $6x^2$, $7x$ и 9; 2) $2x^2$, $-11x$ и 3;
3) $-x^4$, x^3 и $-x$; 4) a^5, $-a^4$ и a;
5) $8a^3$, $4a^2b$, $-2ab^3$ и b^3; 6) $4a^3b$, $-2a^2b^2$, $-5ab^3$.

228. Упростить многочлен, записав каждый его член в стандартном виде, и определить степень многочлена:

1) $12a^2ba - 2abab^2 + 11aba$; 2) $2ab^2 \cdot 4ab - 3a^2 \cdot 8aba - 2abab^2$;
3) $1{,}5xy^2(-4)xyz - 4mnkm^2nk$; 4) $4cc^2c\left(-\frac{1}{4}\right)bc + 5xy^2xy^2$.

229. Найти числовое значение многочлена:

1) $2a^4 - ab + 2b^2$ при $a = -1$, $b = -0{,}5$;

2) $x^2 + 2xy + y^2$ при $x = 1{,}2$, $y = -1{,}2$.

Упростить многочлен и найти его значение **(230—231)**:

230. 1) $-aba + a^2b \cdot 2ab + 4$ при $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$;

2) $b^2 \cdot 5ab - 5a \cdot 5a^2b$ при $a = \frac{1}{5}$, $b = -2$.

231. 1) $x^2yxy - xy^2xy + xy$ при $x = -3$, $y = 2$;

2) $xy^2x^2y - xyxy$ при $x = -2$, $y = 3$.

232. При каком значении x значение многочлена $-0{,}2x \cdot 3x + 7x \times 1\frac{3}{7} + 0{,}1x^2 \cdot 6 - 2x$ равно 1?

233. Может ли при $a > 0$ и $b > 0$ значение многочлена:

1) $2ab + 3b^2 + 1$, $a^2 - b^2$ быть числом отрицательным;

2) $b^2 - 4a^2$, $ab - a^2b^2$ быть числом положительным?

234. На учебно-опытном участке собрано 1410 кг фруктов, причём яблок собрано в 5 раз больше, чем груш, и на 350 кг больше, чем слив. Сколько килограммов каждого вида фруктов собрано на этом участке?

Диалог об истории

О корне многочлена и объёме египетской пирамиды

Мы уже давно и много занимаемся преобразованиями многочленов: записываем формулы с помощью многочленов, приводим подобные слагаемые после раскрытия скобок и т. п. Наверное, многочленам в алгебре уделяется много внимания?

Действительно, существует большая ветвь алгебры под названием «Алгебра многочленов». Ал-Хорезми ещё в IX в. говорил: «Основная задача алгебры — решение уравнений». Но решение и исследование уравнений (записанных в общем виде: $ax + b = c$, $ax^2 + bx + c = 0$ и др.) невозможно без навыков работы с многочленами. О близости уравнений и многочленов говорит хотя бы то обстоятельство, что *корень многочлена*

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

по сути — корень уравнения

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Профессор, использовались ли в древности многочлены для решения практических задач?

Например, в Древнем Египте использовали формулу для вычисления объёма V усечённой пирамиды с высотой h, в основаниях которой лежат квадраты со сторонами a и b соответственно:

$$V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2).$$

Значит, в Египте в давние времена умели находить, в частности, числовое значение многочлена $a^2 + ab + b^2$. А с помощью формулы объёма египтяне рассчитывали количество материалов, необходимых для строительства пирамиды.

§ 14 Приведение подобных членов

Упрощение записей алгебраических выражений — одно из самых важных алгебраических умений. Составной частью этого умения является приведение подобных членов в многочлене, чему вы и научитесь в этом параграфе. Это действие облегчает также нахождение числовых значений многочлена при различных значениях входящих в него букв.

Нужно вспомнить:

- свойства степени с натуральным показателем;
- приведение одночлена к стандартному виду;
- деление числа на части в заданном отношении;
- понятие масштаба.

Задача 1. Имеются две книги с одинаковым числом букв на каждой странице; на одной странице помещается n строк и в каждой строке m букв. В первой книге 300 страниц, во второй — 500. Сколько всего букв в двух книгах?

▶ 1-й способ. Число букв на каждой странице равно nm. В первой книге $300nm$ букв, во второй — $500nm$ букв, в двух книгах $(300nm+500nm)$ букв.

2-й способ. Число букв на каждой странице равно nm. Число страниц в двух книгах равно $300+500=800$. Поэтому число букв в них равно $800nm$. ◁

Разумеется, оба ответа верные, поэтому

$$300nm+500nm=800nm.$$

Однако при вычислениях второй ответ более удобен. Например, если $n=40$, $m=50$, то $nm=2000$, и для вычисления значения выражения $300nm+500nm$ нужно сделать три действия:

$$300\cdot 2000+500\cdot 2000=600\,000+1\,000\,000=1\,600\,000,$$

а для вычисления значения выражения $800nm$ нужно сделать всего одно действие:

$$800\cdot 2000=1\,600\,000.$$

Именно поэтому важно уметь упрощать алгебраические выражения.

Двучлен $300nm+500nm$ является суммой двух одночленов: $300nm$ и $500nm$. Эти одночлены отличаются друг от друга только коэффициентами. Такие **одночлены** называют **подобными.**

Например, одночлены abc и $-3abc$ подобны, одночлены $2pq^2$ и $5q^2p$ подобны, а одночлены a^2b и ab^2 не являются подобными. Одинаковые одночлены также считают подобными. Например, одночлены $2a^2b$ и $2a^2b$ подобны.

Задача 2. Упростить многочлен $3ab-2bc+4ac-ab+3bc+4ab$.

▶ Выделим подобные одночлены. Одночлены $3ab$, $-ab$, $4ab$ подобны, подчеркнём их одной чертой. Подобные одночлены $-2bc$ и $3bc$ подчеркнём двумя чертами. Подобных одночлену $4ac$ нет, его подчёркивать не будем. Получим:

$$\underline{3ab}-\underline{\underline{2bc}}+4ac-\underline{ab}+\underline{\underline{3bc}}+\underline{4ab}.$$

Переставим члены многочлена так, чтобы подобные члены стояли рядом, и заключим подобные члены в скобки. Получим:

$$(3ab-ab+4ab)+(-2bc+3bc)+4ac.$$

Так как

$$3ab-ab+4ab=(3-1+4)\,ab=6ab,$$
$$-2bc+3bc=(-2+3)\,bc=bc,$$

то

$$3ab - 2bc + 4ac - ab + 3bc + 4ab = 6ab + bc + 4ac. \triangleleft$$

Такое упрощение многочлена, при котором алгебраическая сумма подобных одночленов заменяется одним одночленом, называют **приведением подобных членов.**

У многочлена $6ab + bc + 4ac$ каждый член записан в стандартном виде, и среди них нет подобных. Такой вид многочлена называют **стандартным.** Многочлен $3a^2b^2 - 2a^2b + a$ также записан в стандартном виде.

Любой многочлен можно записать в стандартном виде. Для этого нужно записать каждый член многочлена в стандартном виде и привести подобные члены.

Задача 3. Привести к стандартному виду многочлен.

► $6ab \cdot \frac{1}{3}ac - 3aca - 8a^2 \cdot \frac{1}{2}b + 25a^2 \cdot \frac{1}{5}c + aba - a^2bc =$

$= \underline{2a^2bc} - \underline{\underline{3a^2c}} - \underline{\underline{\underline{4a^2b}}} + \underline{\underline{5a^2c}} + \underline{\underline{\underline{a^2b}}} - \underline{a^2bc} = a^2bc + 2a^2c - 3a^2b. \triangleleft$

Устные вопросы и задания

1. Какие одночлены называют подобными?
2. Что называют приведением подобных членов?
3. Как привести многочлен к стандартному виду?
4. Найти в словаре (или в Интернете) трактовку понятия коэффициент. Кто ввёл это понятие в курс алгебры?

Вводные упражнения

1. Привести к стандартному виду одночлен:

   1) $15a^2(-3)ab^3\frac{1}{5}ca$; 2) $0{,}6x^3y^6(-5)z^3y \cdot 0{,}1x$.

2. Подчеркнуть одночлены, отличающиеся только коэффициентами:

   1) $\frac{1}{2}xy^2 - 7x^2y^2 + 3xy^2 - xy + x^2y^2$;

   2) $-8a^3b + 2ab^2 + \frac{1}{2}b^2a + 3a^2b^2 + 0{,}3ba^3$.

3. В яблочном джеме масса яблок в 2 раза больше, чем масса сахара. Какова масса сахара и какова масса яблок в 1,5 кг джема?
4. Масштаб карты 1 : 100 000. Каково расстояние между двумя населёнными пунктами, если на карте это расстояние 2 см?

Упражнения

Привести подобные члены **(235—236)**.

235. 1) $\frac{3}{2}y^4 - \frac{1}{16}y^4 + \frac{1}{32}y^4 - \frac{1}{4}y^4$; 2) $\frac{3}{2}a^2b - \frac{5}{8}a^2b + \frac{1}{8}a^2b - \frac{3}{16}a^2b$.

236. 1) $2m + q + q - 4m$; 2) $3a + 2b - b - a$;
3) $x^2 + 3y^2 + 4x^2 - y^2$; 4) $5a^2 - 4b^2 - 3a^2 + b^2$.

Привести многочлен к стандартному виду **(237—240)**.

237. 1) $11x^2 + 4x - x^2 - 4x$; 2) $2y^2 - 3y + 2y - 2y^2$;
3) $0{,}3c^2 - 0{,}1c^2 - 0{,}5c^3$; 4) $1{,}2a^2 + 3{,}4a^2 - 0{,}8a^2$.

238. 1) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}y$; 2) $\frac{1}{5}a^2 + \frac{3}{4}b^2 + \frac{4}{5}a^2 - \frac{3}{4}b^2$;
3) $2ab + 0{,}7b^2 - 0{,}5ab + 1{,}2b^2 + 8ab$;
4) $5xy - 3{,}5y^2 - 2xy + 1{,}3y^2 - xy$.

239. 1) $2a^2b - 8b^2 + 5a^2b + 5c^2 - 3b^2 + 4c^2$;
2) $3xy^2 + 4x^3 - 5x^2y - 3x^3 + 4x^2y - 9xy^2$.

240. 1) $2m \cdot 4n - 3a \cdot 2b - 0{,}2n \cdot 5m + b \cdot 5a - 5nm + 8ab$;
2) $13ab - 0{,}2xy - 2a \cdot 5b + 6x\,(0{,}2)\,y + a\,(-3)\,b$;
3) $2abc \cdot 5a + 1\frac{5}{7}a^2 \cdot \frac{7}{12}bc - \left(2\frac{2}{3}\right)ab\left(-\frac{3}{8}\right)a$;
4) $3nmk \cdot 4n - \frac{3}{8}nm\left(2\frac{2}{3}\right)nk + \frac{2}{9}n^2m\left(-4\frac{1}{2}\right)k$.

241. Найти значение многочлена:
1) $-0{,}08x + 73xy^3 + 27xy^2$ при $x = 4$ и $y = 0{,}2$;
2) $-2a^2b + 4b + 11a^2b$ при $a = -\frac{1}{3}$ и $b = 2\frac{3}{4}$.

242. Привести многочлен к стандартному виду и выяснить, при каких значениях x его значение равно 1:
1) $2x^2 - 3x - x^2 - 5 + 2x - x^2 + 10$;
2) $0{,}3x^3 - x^2 + x - x^3 + 3x^2 + 0{,}7x^3 - 2x^2 + 0{,}07$.

243. 1) Для приготовления бронзы берётся 17 частей меди, 2 части цинка и одна часть олова. Сколько нужно взять каждого металла в отдельности, чтобы получить 400 кг бронзы?

2) План земельного участка имеет форму треугольника со сторонами 5 см, 4 см и 3 см. Какой выбран масштаб на этом плане, если периметр участка равен 60 м?

Разговор о важном

Обозначения суммы и произведения

Профессор, мне не всё понятно в обозначениях чисел буквами. Например, я с помощью цифр 1, 9 и 8 записала число 198, и все понимают, что между цифрами в нём «ничего не стоит». Но если я с помощью букв a, b и c попробую записать трёхзначное число (предполагая, что каждая буква обозначает однозначное число), то получу abc, а эта запись будет обозначать произведение a на b и на c, верно?

Ты абсолютно права, Светлана. Математики договорились над буквенной записью многозначных чисел ставить чёрточку. Например, запись $\overline{abc}$ обозначает трёхзначное число $100a+10b+c$ (записанное в виде суммы разрядных слагаемых, где a, b и c — однозначные числа).

Попробуем вместе доказать, что если $a+b$ делится на 7, то число $\overline{aba}$ также делится на 7. При доказательстве понадобится умение приводить подобные члены в многочлене.

● Число $\overline{aba}$ представим в виде суммы разрядных слагаемых:

$$\overline{aba}=100a+10b+a \text{ или } \overline{aba}=101a+10b. \qquad (*)$$

Так как по условию задачи $a+b$ делится на 7, то $a+b=7n$, где n — натуральное число, откуда $b=7n-a$. В равенство (*) вместо b подставим его выражение $(7n-a)$:

$$\overline{aba}=101a+10(7n-a)=101a+70n-10a=$$
$$=91a+70n=7\cdot(13a+10n),$$

а это число делится на 7. ○

§ 15 Сложение и вычитание многочленов

При рассмотрении этой темы вы научитесь складывать многочлены и находить их разность. Убедитесь в том, что арифметические знания часто используются в алгебре, например, при сложении и вычитании многочленов столбиком.

Нужно вспомнить:

- понятие алгебраической суммы;
- правила раскрытия скобок;
- приведение подобных членов;
- решение линейных уравнений;

- понятие чётного, нечётного чисел;
- запись числа в виде суммы разрядных слагаемых;
- понятие делимости числа на натуральное число n.

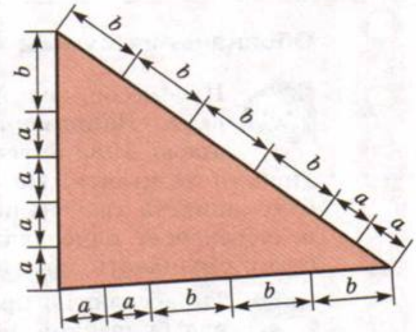


Рис. 7

Рассмотрим треугольник, размеры которого указаны на рисунке 7. Его периметр P равен сумме длин сторон: $P = (2a + 3b) + (4a + b) + (2a + 4b)$. Это выражение является суммой трёх многочленов: $2a + 3b$, $4a + b$, $2a + 4b$. Раскроем скобки:

$$P = 2a + 3b + 4a + b + 2a + 4b.$$

Приведя подобные члены, получим: $P = 8a + 8b$.

Точно так же любую алгебраическую сумму многочленов можно преобразовать в многочлен стандартного вида. Например:

$$(2n^2 - m^2) - (n^2 - m^2 + 3q^2) = 2n^2 - m^2 - n^2 + m^2 - 3q^2 = n^2 - 3q^2;$$

$$(3ab - 4bc) + (bc - ab) - (ac - 3bc) =$$
$$= 3ab - 4bc + bc - ab - ac + 3bc = 2ab - ac.$$

В результате сложения и вычитания нескольких многочленов снова получается многочлен.

Чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены.

Иногда сумму или разность многочленов удобно находить «столбиком» (по аналогии со сложением и вычитанием чисел).

При этом подобные члены располагаются друг под другом, например:

$$+\begin{array}{r} 5a^2b - 4bc + 3ac \\ 3bc - 7ac \\ \hline 5a^2b - \ \ bc - 4ac \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 5abc - 2ab + 4ac - \ \ bc \\ 3abc - 3ab - \ \ ac + 3bc \\ \hline 2abc + \ \ ab + 5ac - 4bc \end{array}$$

Устные вопросы и задания

1. Что нужно сделать, чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида?
2. Убедиться в том, что число -1 является корнем уравнения
   1) $7x + 9 = 2$; 2) $2x^2 - 3x - 5 = 0$.

Вводные упражнения

1. Раскрыть скобки:

1) $2a-(3b+4c-7d)$; 2) $3+(a-6d)-(-3c+b)$.

2. Привести подобные члены:

1) $0{,}8a-3b^2c-1{,}8a+b^2c$; 2) $1\frac{1}{3}x^2y+xy^2-\frac{2}{3}x^2y+x^2y^2-5xy^2$.

Упражнения

Упростить алгебраическую сумму многочленов **(244—246)**.

244. 1) $8a+(-3b+5a)$; 2) $5x-(2x-3y)$;
3) $(6a-2b)-(5a+3b)$; 4) $(4x+2)+(-x-1)$.

245. 1) $\left(2\frac{3}{5}b-\frac{3}{4}b^2\right)+\left(\frac{1}{4}b^2-1\frac{3}{5}b\right)$;
2) $(0{,}1c-0{,}4c^2)-(0{,}1c-0{,}5c^2)$;
3) $(13x-11y+10z)-(-15x+10y-15z)$;
4) $(17a+12b-14c)-(11a-10b-14c)$.

246. 1) $(7m^2-4mn-n^2)-(2m^2-mn+n^2)$;
2) $(5a^2-11ab+8b^2)+(-2b^2-7a^2+5ab)$;
3) $(-2x^3+xy^2)+(x^2y-1)+(x^2y-xy^2+3x^3)$;
4) $(3x^2+5xy+7x^2y)-(5xy+3x^2)-(7x^2y-3x^2)$.

247. Найти сумму и разность многочленов:
1) $0{,}1x^2+0{,}02y^2$ и $0{,}17x^2-0{,}08y^2$;
2) $0{,}1x^2-0{,}02y^2$ и $-0{,}17x^2+0{,}08y^2$;
3) $a^3-0{,}12b^3$ и $0{,}39a^3-b^3$; 4) $a^3+0{,}12b^3$ и $-0{,}39a^3+b^3$.

248. Найти «столбиком» разность многочленов:
1) $3a^2+8a-4$ и $3+8a-5a^2$; 2) b^3-3b^2+4b и $b+2b^2+b^3$.

249. Упростить выражение:
1) $P+Q$, если $P=5a^2+b$, $Q=-4a^2-b$;
2) $P-Q$, если $P=2p^2-3q^3$, $Q=2p^2-4q^3$;
3) $A+B+C$, если $A=a^2-b^2+ab$, $B=2a^2+3ab-5b^2$, $C=-4a^2+2ab-3b^2$;
4) $A-B+C$, если $A=2a^2-3ab+4b^2$, $B=3a^2+4ab-b^2$, $C=a^2+2ab+3b^2$.

250. Решить уравнение:
1) $(7x-9)+(2x-8)=1$; 2) $(12x+5)+(7-3x)=3$;
3) $(0{,}2x-7)-(6-0{,}1x)=2$; 4) $(1-5{,}1x)-(1{,}7x+5{,}4)=1$.

251. Доказать, что сумма:

1) семи последовательных натуральных чисел делится на 7;
2) четырёх последовательных нечётных чисел делится на 8.

252. Упростить:

1) $12{,}5x^2 + y^2 - (8x^2 - 5y^2 - (-10x^2 + (5{,}5x^2 - 6y^2)))$;
2) $0{,}6ab^2 + (2a^3 + b^3 - (3ab^2 - (a^3 + 2{,}4ab^2 - b^3)))$.

253. В двузначном числе десятков втрое больше, чем единиц. Если от этого числа отнять число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится 36. Найти число.

254. В двузначном числе десятков втрое больше, чем единиц. Если к этому числу прибавить число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится 132. Найти число.

Это интересно

Фокус с угадыванием задуманного числа

Профессор, я показывала друзьям фокус, которому Вы меня научили. В нём использовалось замечательное свойство последней цифры куба числа. Сейчас мы изучили действия сложения и вычитания многочленов. Покажете какой-нибудь фокус, в котором используются наши новые знания.

Хорошо. Послушайте, как проводить фокус.
Попросите своего товарища задумать какое-нибудь трёхзначное число. Пусть он найдёт сумму цифр этого числа и отнимет её от задуманного числа. После этого попросите в полученной разности зачеркнуть любую одну цифру и сообщить вам две оставшиеся. Теперь вы сразу можете назвать зачёркнутую цифру. Раскрою *секрет фокуса*.

Пусть задумано число $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Сумма цифр задуманного числа равна $a + b + c$. Отнимем от задуманного числа сумму его цифр:

$$100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9(11a + b).$$

Число $9(11a + b)$ делится на 9, значит, при вычитании из задуманного числа суммы его цифр всегда получится число, делящееся нацело на 9.

После того как названы две оставшиеся после зачёркивания цифры, вы их суммируете и подыскиваете такое число, которое нужно сложить с полученной суммой, чтобы получить ближайшее делящееся на 9 число (не меньшее полученной суммы). Это число и определит зачёркнутую цифру.

Пусть задумано число 589. Вычитаем из него сумму его цифр: $589 - (5 + 8 + 9) = 589 - 22 = 567$. Зачеркнём цифру 6, останутся 5 и 7. Их сумма равна 12. До ближайшего числа, не меньшего чем 12 и делящегося на 9, не хватает шести. Как видим, это число и определяет зачёркнутую цифру. В том случае, когда после суммирования двух оставшихся цифр получается число, делящееся на 9, была зачёркнута либо цифра 0, либо цифра 9. Тут уж придётся перед товарищем извиниться, сказав, что точно определить зачёркнутую цифру не можете, но эта цифра либо 0, либо 9.

§ 16 Умножение многочлена на одночлен

Применение знакомого вам распределительного закона позволит выполнить действие умножения одночлена на многочлен (или умножения многочлена на одночлен). Последующие преобразования полученного многочлена будут выполняться также с помощью знакомой операции приведения подобных членов. Так что материал этого параграфа без труда может быть изучен всеми учащимися самостоятельно.

Нужно вспомнить:

- распределительный и переместительный законы умножения;
- приведение одночлена к стандартному виду;
- запись многочлена в стандартном виде.

На рисунке 8 указаны размеры дома, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда. Его объём равен произведению высоты и площади основания:

$$(a + 2b + c) \cdot (3ab).$$

Это выражение является произведением многочлена $a + 2b + c$ и одночлена $3ab$. Применим распределительное свойство умножения:

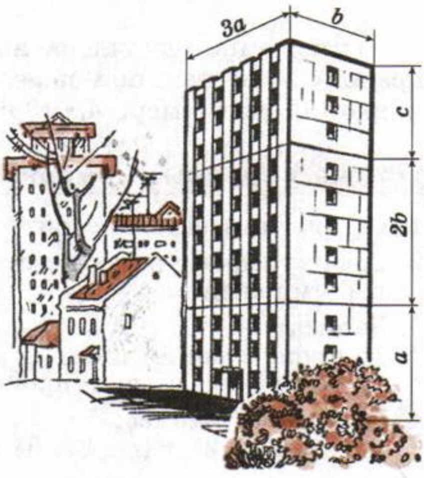


Рис. 8

$$(a + 2b + c) \cdot (3ab) = a \cdot 3ab + 2b \cdot 3ab + c \cdot 3ab = 3a^2b + 6ab^2 + 3abc.$$

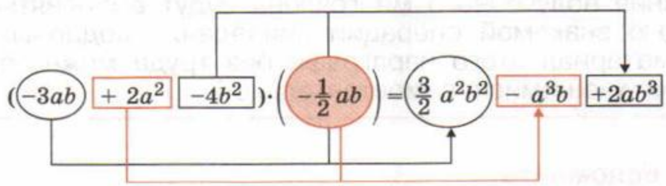
Точно так же выполняется умножение любого многочлена на одночлен, например:

$$(2n^2m-3nm^2)(-4nm)=(2n^2m)(-4nm)+(-3nm^2)(-4nm)=$$
$$=-8n^3m^2+12n^2m^3;$$
$$(3a^2-4ab+5c^2)(-5bc)=3a^2(-5bc)-4ab(-5bc)+5c^2(-5bc)=$$
$$=-15a^2bc+20ab^2c-25bc^3.$$

Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить.

В результате умножения многочлена на одночлен снова получится многочлен. Получившийся многочлен можно упростить, записав его в стандартном виде. Промежуточный результат можно не записывать, а сразу писать ответ, выполняя умножение одночленов устно, например:

$$(-3ab+2a^2-4b^2)\left(-\frac{1}{2}ab\right)=a^2b^2-a^3b+2ab^3.$$



Умножение одночлена на многочлен производится по тому же правилу, так как при перестановке множителей произведение не меняется, например: $4pq(3p^2-q+2)=12p^3q-4pq^2+8pq$.

Устные вопросы и задания

1. Сформулировать алгоритм умножения многочлена на одночлен.

2. Сформулировать переместительный и распределительный законы умножения.

3. Записать:
1) произведение числа c и разности чисел a и b;
2) сумму числа a и произведения чисел c и d.

4. Прочитать запись:
1) $(x+y)z$; 2) $x^2(y+2)$; 3) x^2+y^2; 4) $(x+y)^2$; 5) a^3-b^3; 6) $(a-b)^3$.

Вводные упражнения

1. Записать в виде одночлена стандартного вида:
1) $5a^2\cdot 6a^3b$; 2) $-0,8x^2y\cdot 5xy^4$.

2. Найти значение одночлена:

1) $2ab^2\frac{1}{2}aab$ при $a=-1$, $b=2$;

2) $-2{,}5xy^3x(-4)yx^2$ при $x=2$, $y=-1$.

3. Найти сумму и разность многочленов:

1) $5a-3b+1$ и $-6a+2b-3$;

2) $0{,}5x^2y+1{,}5xy^2-2$ и $2{,}5x^2y-0{,}5xy^2+2$.

4. Найти: 1) 30% от числа 60; 2) число, 30% которого равны 60.

Упражнения

Найти произведение многочлена и одночлена **(255—257)**.

255. 1) $2(3a^2-4a+8)$; 2) $\left(-\frac{1}{3}\right)(m-n+p)$;

3) $(3a-5b+bc)(-3)$; 4) $(-5)(3x^3+7x^2-x)$.

256. 1) $7ab(2a+3b)$; 2) $5a^2b(15b+3)$; 3) $3xy^2(xy-2x^3)$.

257. 1) $17a(5a+6b-3ab)$; 2) $8ab(2b-3ac+c^2)$;
3) $3x^2y(5x+6y+7z)$; 4) $xyz(x^2+2y^2+3z^2)$.

Упростить выражение **(258—259)**.

258. 1) $6(2t-3n)-3(3t-2n)$; 2) $5(a-b)-4(2a-3b)$;
3) $-2(3x-2y)-5(2y-3x)$; 4) $7(4p+3)-6(5+7p)$.

259. 1) $(x^2-1)\cdot 3x-(x^2-2)\cdot 2x$; 2) $(4a^2-3b)\cdot 2b-(3a^2-4b)\cdot 3b$.

3) $\frac{2}{3}x(3-6x)+4x(x-1)$; 4) $(a-15b)\cdot\frac{4}{5}a-3\left(\frac{1}{5}a^2+2ab\right)$.

260. Найти значение алгебраического выражения:
1) $7(4a+3b)-6(5a+7b)$ при $a=2$, $b=-3$;
2) $a(2b+1)-b(2a-1)$ при $a=10$, $b=-5$;
3) $3ab(4a^2-b^2)+4ab(b^2-3a^2)$ при $a=10$, $b=-5$;
4) $4a^2(5a-3b)-5a^2(4a+b)$ при $a=-2$, $b=-3$.

261. Решить уравнение:
1) $3(x-1)-2(3-7x)=2(x-2)$;
2) $10(1-2x)=5(2x-3)-3(11x-5)$;
3) $1{,}3(x-0{,}7)-0{,}12(x+10)-5x=-9{,}75$;
4) $2{,}5(0{,}2+x)-0{,}5(x-0{,}7)-0{,}2x=0{,}5$.

262. При каком значении x равны значения выражений:

1) $\frac{1}{2}(x-7)+1$ и $\frac{3(1-x)}{4}$; 2) $\frac{2}{5}(3-2x)$ и $\frac{3(1+3x)}{10}-\frac{4}{5}$;

3) $\frac{1}{3}(x+2)$ и $\frac{2x-1}{3}$; 4) $\frac{2-3x}{4}$ и $\frac{3(x+1)}{8}-1$?

263. Во второй день турист прошёл путь, равный 90% того, что он прошёл в первый день, и после небольшого отдыха прошёл ещё 2 км. В третий день он прошёл путь, равный 40% того, что было пройдено за первые два дня. Какое расстояние проходил турист ежедневно, если за три дня он прошёл 56 км?

Диалог об истории

Умножение многочленов столбиком

Во II книге «Начал» Евклида распределительный закон умножения $a(b+c+...+d)=ab+ac+...+ad$ доказывается геометрическим способом. Этот закон и лежит в основе правила умножения многочлена на одночлен.

Если в многочлене много членов, то при умножении его на одночлен я могу потерять какое-нибудь слагаемое или перепутать степени одночленов.

В таком случае можно пользоваться умножением «в столбик». Посмотри на следующий пример записи:

$$\begin{array}{r} 7a^4+3a^3b-2a^2b^2-5ab^3+6b^4-4 \\ \times \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2ab \\ \hline 14a^5b+6a^4b^2-4a^3b^3-10a^2b^4+12ab^5-8ab \end{array}$$

Так записывали умножение многочлена на одночлен в прошлые века. Такую запись и сейчас можно встретить в американских и европейских школьных учебниках.

§ 17 Умножение многочлена на многочлен

Используя навыки умножения одночлена на многочлен, вы без труда сможете выполнять умножение многочлена на многочлен. Правило умножения многочленов будет обосновано в этом параграфе с помощью распределительного закона умножения.

Нужно вспомнить:

- приведение одночлена к стандартному виду;
- умножение одночлена на многочлен;
- приведение многочлена к стандартному виду;
- распределительный закон умножения.

Задача. Найти площадь поверхности стены, занятой шкафами, размеры которых указаны на рисунке 9.

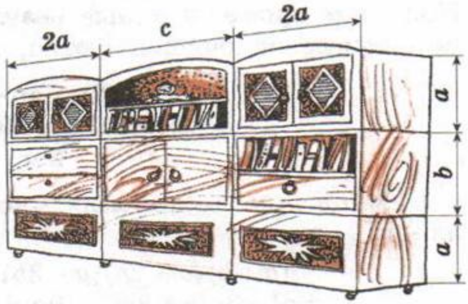


Рис. 9

► Поверхность стены, занятая шкафами, является прямоугольником. Найдём стороны этого прямоугольника:

$$2a + c + 2a = 4a + c \text{ и } a + b + a = 2a + b.$$

Площадь этого прямоугольника равна $S = (4a + c)(2a + b)$. ◁

Выражение $(4a + c)(2a + b)$ является произведением многочленов $4a + c$ и $2a + b$. Применяя распределительное свойство умножения чисел, можно записать:

$$S = (4a + c)(2a + b) = 4a(2a + b) + c(2a + b).$$

Так как

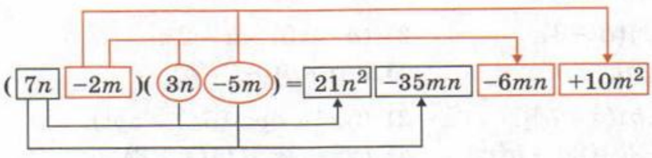
$$4a(2a + b) = 8a^2 + 4ab \text{ и } c(2a + b) = 2ac + bc,$$

то

$$S = 8a^2 + 4ab + 2ac + bc.$$

Таким образом, для нахождения произведения данных многочленов пришлось перемножить каждый член многочлена $4a + c$ на каждый член многочлена $2a + b$ и результаты сложить. Точно так же перемножаются любые два многочлена, например:

$$(7n - 2m)(3n - 5m) =$$
$$= 7n \cdot 3n + 7n \cdot (-5m) + (-2m) \cdot 3n + (-2m) \cdot (-5m) =$$
$$= 21n^2 - 35nm - 6mn + 10m^2 = 21n^2 - 41nm + 10m^2.$$



Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

В результате умножения многочлена на многочлен снова получается многочлен, который можно записать в стандартном виде.

При этом промежуточные результаты можно не писать, выполняя умножение одночленов устно, например:

$$(2a-4b+3c)(5b-c)=$$
$$=10ab-2ac-20b^2+4bc+15bc-3c^2=$$
$$=10ab-2ac-20b^2+19bc-3c^2.$$

Умножение нескольких многочленов нужно делать поочерёдно, например:

$$(a+b)(a+2b)(a-3b)=(a^2+3ab+2b^2)(a-3b)=$$
$$=a^3-3a^2b+3a^2b-9ab^2+2ab^2-6b^3=a^3-7ab^2-6b^3.$$

Устные вопросы и задания

1. Сформулировать правило умножения многочлена на многочлен.

2. Прочитать запись: 1) $(a+b)(c-d)$; 2) $(a-b)(k+l+m)$.

Вводные упражнения

1. Записать в виде одночлена стандартного вида:

1) $-15x^3y^2\frac{1}{5}x^6y$; 2) $\frac{2}{3}a^5b^7\left(-\frac{3}{4}\right)ab^3c$.

2. Записать в стандартном виде многочлен:

1) $13m^{12}n-6mn^6+8m^{12}n^6-7mn^6$;

2) $-28p^7k^3+18p^7k-10k^3p^7-8kp^7+4$.

Упражнения

Выполнить умножение многочленов **(264—268)**.

264. 1) $(a+2)(a+3)$; 2) $(z-1)(z+4)$;
3) $(m+6)(n-1)$; 4) $(b+4)(c+5)$.

265. 1) $(c-4)(d-3)$; 2) $(a-10)(-a-2)$;
3) $(x+y)(x+1)$; 4) $(-p+q)(-1-q)$.

266. 1) $(a^2+b)(a+b^2)$; 2) $(5x^2-6y^2)(6x^2-5y^2)$;
3) $(a^2+2b)(2a+b^2)$; 4) $(x^2+2x+1)(x+3)$.

267. 1) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$; 2) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$;
3) $(5x+3y)(25x^2-15xy+9y^2)$; 4) $(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$.

268. 1) $(a-b)(a+b)(a-3b)$; 2) $(a+b)(a-b)(a+3b)$;
3) $(x+3)(2x-1)(3x+2)$; 4) $(x-2)(3x+1)(4x-3)$.

269. Найти значение алгебраического выражения, предварительно упростив его:

1) $(a-4)(a-2)-(a-1)(a-3)$ при $a=1\frac{3}{4}$;

2) $(m-5)(m-1)-(m+2)(m-3)$ при $m=-2\frac{3}{5}$;

3) $(x+1)(x+2)+(x+3)(x+4)$ при $x=-0{,}4$;

4) $(a-1)(a-2)+(a-3)(a-4)$ при $a=0{,}2$.

270. 1) Показать, что при $x=2\frac{1}{7}$ значение выражения $(5x-1)(x+3)-(x-2)(5x-4)$ равно 49.

2) Показать, что при $a=-3{,}5$ значение выражения $(a+3)(9a-8)-(2+a)(9a-1)$ равно -29.

271. Вычислить значение выражения:

1) $\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n^2-\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}\right)$ при $n=-2\frac{1}{2}$;

2) $\left(n-\frac{1}{3}\right)\left(n^2+\frac{1}{3}n+\frac{1}{9}\right)$ при $n=\frac{7}{3}$.

272. Упростить выражение и выяснить, при каком значении x значение выражения равно a:

1) $(x+3)(x-3)+(4-x)x$; 2) $x(1-2x)-(x-3)(x+3)+3x^2$;

3) $(x+2)(x+2)-x(5+x)$; 4) $x^2(3-x)-(2-x^2)(x+1)-4x^2$.

273. 1) Рассматривая площадь прямоугольника $ABCD$ (рис. 10, *а*), показать, что $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$.

2) Рассматривая площадь прямоугольника $ABFE$ (рис. 10, *б*), показать, что $(a+b)(c-d)=ac+bc-ad-bd$.

3) Рассматривая площадь прямоугольника $BFKM$ (рис. 10, *б*), показать, что $(a+b)d=(a+b)c-(a+b)(c-d)$.

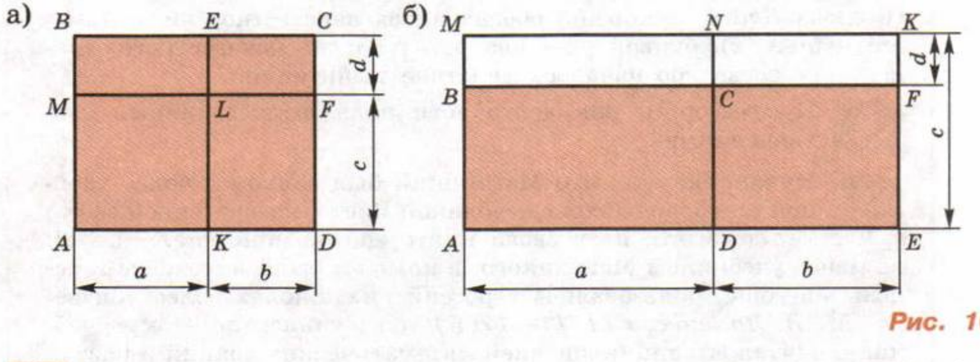


Рис. 10

274. Доказать, что если $a(b+1)+b(a+1)=(a+1)(b+1)$, то $ab=1$.

275. Ширина прямоугольника на 15 м меньше его длины. Если ширину увеличить на 8 м, а длину уменьшить на 6 м, то площадь нового прямоугольника будет на 80 м^2 больше площади данного. Найти площадь данного прямоугольника.

276. Периметр прямоугольника 60 см. Если длину этого прямоугольника увеличить на 10 см, а ширину уменьшить на 6 см, то площадь нового прямоугольника будет на 32 см^2 меньше площади данного. Найти площадь данного прямоугольника.

277. Доказать равенство:

1) $(n-2)(n-1)n(n+1)+1=(n^2-n-1)^2$;
2) $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2$;
3) $(n-3)(n-2)(n-1)n+1=(n^2-3n+1)^2$;
4) $(n^2-2n+1)(n^2+2n+1)=(n^2-1)^2$.

Диалог об истории

Об учебнике Л. Ф. Магницкого

Хочу вам показать интересную запись, которая была сделана в правом нижнем углу титульного листа первого русского учебника арифметики *Л. Ф. Магницкого (1669—1739)*, изданного в 1703 г.:

Л. Ф. Магницкий

$$\begin{array}{r} 2R+1 \\ 3R\div 2 \\ \hline 6q+3R \\ \div 4R\div 2 \\ \hline 6q\div 1R\div 2 \end{array}$$

Так в российских школах в те времена записывали умножение столбиком двух многочленов. Буквой R (первая буква латинского слова *Radix* — корень) обозначалось неизвестное число (вместо нашего x), буквой q — квадрат этого же неизвестного, знаком «÷» тогда обозначалось действие вычитания.

Профессор, и как долго дети пользовались такими обозначениями?

Нужно сказать, что Магницкий был знаком с более удобной алгебраической символикой Виета, изобретённой за сто лет до этого, но в своей книге ещё не применял её. Тем не менее учебником Магницкого, в котором были изложены и основы алгебры, пользовались в российских школах более полувека. *М. В. Ломоносов (1711—1765)* тоже учился по этому учебнику, считал его энциклопедией математических знаний и назвал потом этот учебник «вратами учёности».


Арифметика,
сиречь наука числительная.
С разных диалектов на славенский язык преведеная, и во едино собрана, и на две книги разделена.
Ныне же повелением благочестивейшаго великаго государя нашего царя и великаго князя Петра Алексиевича всея великия и малыя и белыя России самодержца:
При благороднейшем великом государе нашем царевиче, и великом князе Алексии Петровиче, в богоспасаемом царствующем великом граде Москве типографским тиснением ради обучения мудролюбивых российских отроков, и всякаго чина и возраста людей на свет произведена, первое, в лето от сотворения мира [illegible], от рождества же по плоти Бога слова [illegible], индикта [illegible], месяца генваря.

Попробую «перевести» запись из учебника Магницкого на современные обозначения и сравнить свой результат умножения с записанным в старинной книге.

§ 18 Деление одночлена и многочлена на одночлен

В предыдущих параграфах было показано, что в результате сложения, вычитания, умножения и возведения в натуральную степень одночленов и многочленов снова получается многочлен. Выражения, содержащие деление одночленов и многочленов, будут подробно рассмотрены в главе V. Иногда в результате такого деления также получается многочлен. Такие случаи деления и будут рассмотрены в данном параграфе.

Нужно вспомнить:
- свойства степеней;
- свойства действия деления.

Рассмотрим случай деления одночлена на одночлен, когда частным является одночлен, а также случай деления многочлена на одночлен, когда частным оказывается многочлен.

1. Деление одночлена на одночлен.

Разделим одночлен $32a^3b^2$ на одночлен $4a^2$. По свойствам умножения и деления получаем:

$$(32a^3b^2):(4a^2)=(32:4)\cdot(a^3:a^2)\cdot b^2=8ab^2.$$

Точно так же делятся одночлены и в других случаях, например:

$$(4a^2b^3):(4a^2b^3)=1; \qquad (66a^4b^2c):(22a^2b)=3a^2bc;$$
$$(9k^2n^2m^2):(-3kn^2m^2)=-3k.$$

2. Деление многочлена на одночлен.

Разделим многочлен $2a^2b+4ab^2+8abc$ на одночлен $2ab$. По свойству деления суммы на число получаем:

$$(2a^2b+4ab^2+8abc):(2ab)=$$
$$=(2a^2b):(2ab)+(4ab^2):(2ab)+(8abc):(2ab)=a+2b+4c.$$

Точно так же делится многочлен на одночлен и в других случаях, например:

$$(9a^3b^2-3a^2b^3+a^2b^2):(3a^2b^2)=(9a^3b^2):(3a^2b^2)+(-3a^2b^3):(3a^2b^2)+$$
$$+(a^2b^2):(3a^2b^2)=3a-b+\frac{1}{3}.$$

Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить.

В рассмотренных примерах деления многочлена на одночлен в результате получался многочлен. В этих случаях говорят, что *многочлен делится на одночлен*. Однако деление многочлена на одночлен не всегда возможно. Например, многочлен $ab+ac$ не делится на одночлен ab. При делении многочлена на одночлен предполагается, что буквы могут принимать такие значения, при которых делитель не равен нулю.

Устные вопросы и задания

1. Что нужно сделать, чтобы разделить многочлен на одночлен?
2. Какие значения могут принимать буквы, входящие в выражение: 1) $(23a^2b):b$; 2) $(-4a^3b^2c+3a^6b^5c^2):a^2b$?
3. Привести пример: 1) одночлена, который не делится на одночлен x^2y^3; 2) многочлена, который не делится на одночлен ac^3.

Вводные упражнения

1. Записать в виде степени: 1) $y^6 \cdot y^3$; 2) $x^{12} : x$; 3) $a^{21} : a^7$.

2. Вычислить:

1) $-1 : \frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{4} : \frac{1}{12}$; 3) $1 : 0{,}01$; 4) $-0{,}06 : 0{,}1$;

5) $3\frac{1}{3} : \frac{5}{9}$; 6) $\frac{4}{7} : 2\frac{1}{14}$; 7) $(3 - 0{,}03) : 3$; 8) $\left(4 + \frac{8}{11}\right) : 2$.

Упражнения

Выполнить деление **(278—284)**.

278. 1) $b^5 : b^2$; 2) $y^{11} : y^7$; 3) $a^7 : a^7$; 4) $b^9 : b^9$.

279. 1) $\frac{2}{5}x : (-2)$; 2) $-7m : \left(-\frac{7}{9}\right)$; 3) $-\frac{3}{4}a : \left(-\frac{8}{9}\right)$; 4) $\frac{16}{25}b : \frac{4}{5}$.

280. 1) $5a : a$; 2) $8x : x$; 3) $5a : (-a)$; 4) $(-7y) : (-y)$.

281. 1) $(-6x) : (2x)$; 2) $15z : (5z)$; 3) $(-6xy) : (-3xy)$; 4) $12ab : (-4ab)$.

282. 1) $8abc : (-4a)$; 2) $(-10pq) : (6q)$;
3) $-6{,}4xy : (-4x)$; 4) $(-0{,}24abc) : (-0{,}6ab)$.

283. 1) $14a^5 : (7a^2)$; 2) $(-42m^7) : (-6m)$;
3) $-0{,}2a^{10} : (-a^{10})$; 4) $\left(-2\frac{1}{3}a^{17}\right) : (-2a^{17})$.

284. 1) $\frac{1}{3}m^3n^2p^2 : \left(-\frac{2}{3}m^2n^2p^2\right)$; 2) $\left(-1\frac{1}{2}a^4b^3c^2\right) : \left(-\frac{2}{3}a^3bc^2\right)$;
3) $-1{,}7p^2q^2y^3 : (28{,}9p^2y^3)$; 4) $-6a^3b^2c : (-2a^2bc)$.

285. Упростить выражение:
1) $(4a^3b^2)^3 : (2a^2b)^2$; 2) $(9x^2y)^3 : (3xy)^2$;
3) $(-abc^2)^5 : (-a^2bc^3)^2$; 4) $(-x^2y^3z)^4 : (xyz)$.

Выполнить деление **(286—289)**.

286. 1) $(12a + 6) : 3$; 2) $(10b - 5) : 5$;
3) $(14m - 8) : (-2)$; 4) $(-6 + 3x) : (-3)$.

287. 1) $(5mn - 6np) : n$; 2) $(4a^2 - 3ab) : a$;
3) $(x - xy) : x$; 4) $(cd - d) : (-d)$.

288. 1) $(3a^3b - 4ab^3) : (5ab)$; 2) $(2c^5d^4 + 3c^4d^3) : (-3c^4d^3)$;
3) $(-27k^4l^5 + 21k^3l^2) : (-10k^3l^2)$; 4) $(-a^5b^3 + 3a^6b^2) : (4a^4b^2)$.

289. 1) $(6a-8b+10):2$; 2) $(8x+12y-16):(-4)$;
3) $(10a^2-12ab+8a):2a$; 4) $(2ab+6a^2b^2-4b):2b$.

Упростить выражение **(290—291).**

290. 1) $(6a^3-3a^2):a^2+(12a^2+9a):(3a)$;
2) $(8x^3-4x^2):(2x^2)-(4x^2-3x):x$;
3) $(7y^4+4y^2):y^2-(14y^3+6y):(2y)$;
4) $(10b^5+15b^3):(5b^2)-(b^4-b^2):b$.

291. 1) $(3x^2-2x^2y):x^2-(2xy^2+x^2y):\left(\frac{1}{3}xy\right)$;
2) $(a^2b-3ab^2):\left(\frac{1}{2}ab\right)+(6b^3-5ab^2):b^2$;
3) $(3a^3x-2ax^3):\left(\frac{1}{4}ax\right)-(a^4x^2-a^2x^4):\left(\frac{1}{8}a^2x^2\right)$;
4) $\left(\frac{2}{3}by^3+\frac{1}{3}b^2y^2\right):\left(\frac{3}{4}by^2\right)-(8b^3y-2b^2y^2):(2b^2y)$.

Найти значение алгебраического выражения **(292—293).**

292. $(18a^4-27a^3):(9a^2)-10a^3:(5a)$ при $a=-8$.

293. $(3x^3+4x^2y):x^2-(10xy+15y^2):(5y)$ при $x=2$, $y=-5$.

Диалог об истории

Необычные обозначения

Знаете ли вы, что знаки арифметических действий в разные времена не всеми учёными обозначались одинаково?

Мы это поняли, когда увидели, как Магницкий в своём учебнике обозначал вычитание знаком «÷». Расскажите, пожалуйста, о различных обозначениях знака деления. Я знаю, что компьютер вместо знака деления обычно рисует наклонную черту.

Известно, что в *Бахшалийской рукописи* (относящейся примерно к VII в.) знак деления «$\longleftrightarrow$» ставился после делителя. А великий английский учёный Исаак Ньютон записывал деление, к примеру, многочлена a^4-2ab^2 на одночлен a^3, используя вместо знака деления круглую скобку: $a^3)a^4-2ab^2$. Двоеточие для обозначения деления стал первым применять знаменитый немецкий математик *Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716)*. Он же первым заменил знак умножения «×» на точку, чтобы его не путали с неизвестным числом x.

Это интересно

Деление многочлена на многочлен

Профессор, Вы нам показывали, как удобно использовать запись столбиком при сложении, вычитании и умножении многочленов. А нельзя ли записывать деление многочленов уголком, по аналогии с тем, как мы делили многозначные числа?

Можно. Деление многочлена на одночлен вы сами легко запишете с помощью уголка. А вот запись деления многочлена на многочлен, когда в результате получается тоже многочлен, я вам сейчас продемонстрирую:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-4x^2+5x-2 & x-1 \\
\underline{x^3-x^2} & \overline{x^2-3x+2} \\
-3x^2+5x & \\
\underline{-3x^2+3x} & \\
2x-2 & \\
\underline{2x-2} & \\
0 &
\end{array}
$$

Таким образом, $(x^3-4x^2+5x-2):(x-1)=x^2-3x+2$.

Можете проверить верность результата с помощью умножения.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

Вычислить **(294—296)**.

294. 1) $\dfrac{(-0,2)^4}{(0,1)^5}$; 2) $\dfrac{(0,3)^3}{(-0,1)^4}$; 3) $\dfrac{(3,2)^2}{(1,6)^2}$; 4) $\dfrac{(2,6)^2}{(1,3)^2}$.

295. 1) $\dfrac{2^5\cdot 2^3}{2^4}$; 2) $\dfrac{3^{11}\cdot 9}{3^{12}}$; 3) $\dfrac{3^4\cdot 3^5}{3^8}$; 4) $\dfrac{2^6\cdot 16}{2^3}$.

296. 1) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4\cdot\dfrac{5^3}{3^2}$; 2) $\dfrac{7^5}{5^7}\cdot\left(\dfrac{5}{7}\right)^6$; 3) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^5$; 4) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^6\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^8$.

297. Верно ли равенство $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$?

298. Записать в виде степени с показателем 3:
1) a^6b^3; 2) $-1000b^6$; 3) $x^{12}y^9z^6$; 4) $-0,008x^3y^9$.

299. Выполнить умножение одночленов:
1) $(-0,4x^5y^6z^2)(-1,2xyz^3)$; 2) $(-2,5n^4m^5k^2)(3nm^2k^5)$;
3) $\left(-1\dfrac{1}{3}x^2y^2z\right)\left(-1\dfrac{1}{2}xy^2z^3\right)$; 4) $\left(2\dfrac{1}{4}a^2b^5c^3\right)\left(-3\dfrac{1}{3}a^3b^2c^4\right)$.

300. Выполнить сложение и вычитание многочленов:

1) $\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b\right)-\left(\frac{5}{2}a-\frac{2}{3}b\right)+(a+b)$;

2) $(0{,}3a-1{,}2b)+(a-b)-(1{,}3a-0{,}2b)$;

3) $11p^3-2p^2-(p^3-p^2)+(-5p^2-3p^3)$;

4) $5x^2+5x^3+(x^3-x^2)-(-2x^3+4x^2)$.

301. Выполнить умножение многочлена на одночлен:

1) $\left(\frac{1}{2}a^3b^2-\frac{3}{4}ab^4\right)\frac{4}{3}a^3b$; 2) $\left(\frac{2}{3}a^2b^4+\frac{1}{2}a^3b\right)\frac{3}{2}ab^3$;

3) $\left(1\frac{4}{7}a^3x^3-2\frac{3}{4}a^2x^3-11ax^4\right)\left(-2\frac{6}{11}ax^6\right)$;

4) $\left(-2\frac{4}{9}b^6y+2\frac{1}{5}b^3y^2-11by^5\right)\left(-2\frac{1}{22}b^4y^5\right)$.

Выполнить умножение многочленов **(302—303)**.

302. 1) $\left(\frac{1}{2}a+3b\right)\left(\frac{1}{2}a-3b\right)$; 2) $(0{,}3-m)(m+0{,}3)$;

3) $\left(\frac{1}{3}a-2b\right)\left(\frac{1}{3}a+2b\right)$; 4) $(0{,}2a+0{,}5x)(0{,}2a-0{,}5x)$.

303. 1) $(5c-4y)(-8c-2x+6y)$; 2) $(4b-c)(-5b+3c-4y)$;

3) $(4x-3y+2z)(3x-3y)$; 4) $(3a-3b+4c)(3a-5b)$.

304. Упростить выражение:

1) $5x^3:x-(2x)^2+x^4:(2x^2)$; 2) $6x^4:x-5x^5:x^2+(2x)^3$;

3) $\left(3x^4+\frac{1}{3}x^2\right):x-x^3:(3x^2)+(3x)^3$;

4) $(12x^3-8x^2):4x-4x(3x+0{,}25)$.

305. Решить уравнение:

1) $(-2)^3\cdot x+(0{,}4)^2=(-1)^9-(1-2x)$;

2) $(1{,}2)^2-(0{,}1)^2(20-200x)=(1{,}4)^2$.

306. Сколько процентов от числа 500 составляет четвёртая степень числа 5?

307. Четвёртая степень числа 0,2 составляет 64% числа a. Найти число a.

308. Записать выражение в виде степени, n — натуральное число:

1) $a^7\cdot a^{2n}\cdot a^{3n-2}$; 2) $x^{n+2}\cdot x^8\cdot x^{4n-1}$;

3) $\frac{a^{6n-4}\cdot a^{4n+1}}{a^{5n-2}}$; 4) $\frac{3^{4n+3}\cdot 3^{3n-2}}{3^{2n-1}}$.

309. При каком значении n верно равенство:

1) $(4^4)^n = 4^{12}$; 2) $(5^n)^2 = 5^{14}$; 3) $2^{2n} = 4^5$; 4) $3(3^2)^n = 3^{11}$?

310. В автобусе было n пассажиров. На первых двух остановках вышло по m человек на каждой остановке, а на третьей никто не вышел, но вошло несколько человек, после чего в автобусе стало k пассажиров. Сколько человек вошло в автобус на третьей остановке?

311. Решить уравнение:

1) $\frac{9-x}{10} = \frac{2x-3}{2}$; 2) $\frac{0,1-2x}{0,4} = \frac{2,5-10x}{12}$.

312. Упростить (n — натуральное число, $n>4$):

1) $(12 \cdot 5^{2n+1} - 8 \cdot 5^{2n} + 4 \cdot 5^{2n-1}) : (4 \cdot 5^{2n-2})$;

2) $(36 \cdot 18^n - 8 \cdot 2^{n-4} \cdot 9^n - 3^{n+1} \cdot 6^{n+1}) : 18^{n-1}$.

313. Доказать, что если $2(a+1)(b+1) = (a+b)(a+b+2)$, то $a^2 + b^2 = 2$.

314. Сумма вклада в сберегательный банк увеличивается каждый год на $p\%$. Доказать, что, вложив в банк a рублей, через три года вкладчик будет иметь на счету $a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$ рублей.

315. Вычислить с помощью микрокалькулятора значение выражения $a \cdot (1,02)^n$ при $a = 1000$ и $n = 3$; 5; 10. Результат округлить до сотых.

СТАРИННЫЕ ЗАДАЧИ

316. Трое хотят купить дом за N ливров. Они условились, что первый даст половину суммы, второй — одну треть, а третий — оставшуюся часть. Сколько даст третий?

317. — Хро́носа* вестник, скажи, какая часть дня миновала?
— Дважды две трети того, что прошло, остаётся.

ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Записать в стандартном виде:

1) число километров, выражающее расстояние от Земли до Солнца и равное 150 млн км;

2) число метров, выражающее радиус Земли и равное 6 370 000 м.

---

* Хронос — бог времени в греческой мифологии. Считалось, что день содержит 12 ч.

2. Сколько биений делает за сутки сердце человека, если считать, что за одну минуту в среднем оно делает 75 биений? Результат записать в стандартном виде.

3. Масса Земли равна $6 \cdot 10^{24}$ кг, масса Луны — $7{,}4 \cdot 10^{22}$ кг. Во сколько раз масса Земли больше массы Луны?

4. Скорость распространения света равна $3 \cdot 10^5$ км/с. Расстояние от Земли до Луны — 384 467 км. За какое время луч света доходит от Луны до Земли?

5. Найти площадь закрашенной на рисунке 11 фигуры.

6. Используя рисунок 12, убедиться в том, что

$(a-b)(c+d)=ac+ad-bc-bd.$

7. На фирме 5 сотрудников получают зарплату k рублей, 12 сотрудников — m рублей и трое — n рублей. Какую сумму денег выдаёт сотрудникам бухгалтер фирмы? Какова их средняя зарплата?

8. Стальная деталь имеет форму шара радиуса a с полостью в форме шара радиуса b $(a>b)$. Найти объём V этой детали, если объём шара находится по формуле $\frac{4}{3}\pi R^3$, где R — радиус шара.

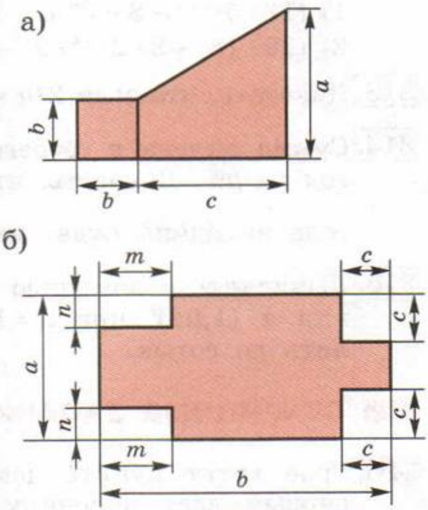


Рис. 11

9. Записать в виде многочленов периметр и площадь закрашенной фигуры (рис. 13).

10. На рисунке 14 показана развёртка прямоугольного параллелепипеда без одной грани, перенесённая на картон. Записать в виде многочлена объём коробки, склеенной из этого картона.

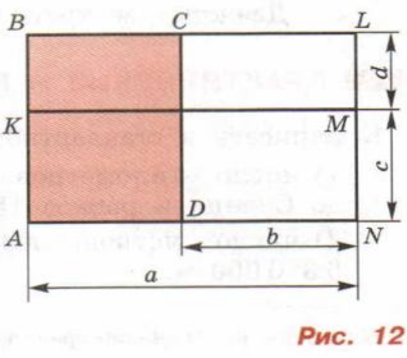


Рис. 12

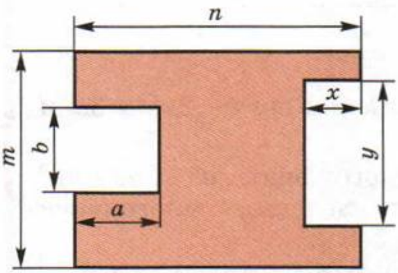


Рис. 13

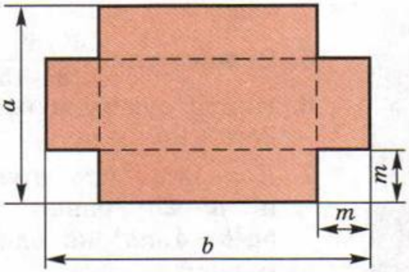


Рис. 14

В этой главе вы узнали,

что такое:

— степень с натуральным показателем;
— стандартный вид числа;
— одночлен;
— многочлен;

как:

— возводить число в степень;
— применять свойства степени с натуральным показателем для упрощения числовых и буквенных выражений;
— представлять одночлен в стандартном виде;
— представлять многочлен в стандартном виде;
— выполнять действия сложения, вычитания и умножения многочленов;
— делить многочлен на одночлен, если в результате получается многочлен;
— применять действия с многочленами при решении уравнений и прикладных задач.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

1. Представить выражение в виде степени:

$$5^3 \cdot 5^2;\ \ 3^8 : 3^6;\ \ (2^3)^4;\ \ 3^5 \cdot 2^5.$$

2. Упростить выражение $(3b + c^2 - d) - (c^2 - 2d)$.

3. Выполнить действия:

а) $(-0{,}25a^3b^2c) \cdot (5abc)$; б) $(7m^2 - 20mn - 10m) : 10m$.

4. Упростить выражение $2m(m-1) + (m-2)(m+2) + 2m$ и найти его числовое значение при $m = -0{,}25$.

II уровень

5. Вычислить: $\frac{3^4 \cdot 5^6 \cdot 4^4}{8^2 \cdot 15^4}$.

6. Найти сумму и разность многочленов $4a^3b - 2ab^3 + 3a$ и $2a^3b + 2ab^3 - a$.

7. Доказать, что произведение многочленов $a^2 + 2ab + 4b^2$ и $a - 2b$ равно частному от деления многочлена $5a^4b - 40ab^4$ на одночлен $5ab$.

8. Решить уравнение: $x^2(x+1) - (x+2)(2x-3) = x^2(x-1)$.

III уровень

9. Вычислить: $\frac{8 \cdot 5^{17} + 11 \cdot 5^{18}}{(5^9 \cdot 3)^2 \cdot 7}$.

10. Упростить выражение: а) $B - A$; б) $-A - B$; в) $A \cdot (-B)$, если $A = a^2 - 3a + 2$, $B = 2a^2 + 3a - 1$.

11. В трёхзначном числе в 3 раза больше десятков, чем сотен, а число единиц равно квадрату числа сотен. Если разность этого числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, разделить на число сотен исходного числа, то получится число –198. Найти исходное число.

12. Доказать, что сумма пяти последовательных чётных чисел делится на 10.

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Алгебра многочленов в учебнике «Арифметика» Л. Ф. Магницкого.
2. Буквенная символика в книге «Арифметика» И. Н. Неморария, европейского математика XIII века.
3. Вклад Рене Декарта в освобождение алгебры от влияния геометрии.
4. Теория деления многочлена на многочлен.
5. Подходы к решению задач о делимости суммы степеней на некоторое число. Доказательство делимости:

   1) $16^5 + 2^{15}$ на 33; 2) $333^{555} + 555^{333}$ на 37.

ГЛАВА IV

Разложение многочленов на множители

В предыдущей главе вы научились выполнять различные действия с многочленами и записывать результат в виде многочлена стандартного вида.

В действиях с многочленами большое внимание уделяется представлению многочлена в виде произведения. Это действие называется *разложением многочлена на множители*. Умение раскладывать многочлены на множители имеет важное значение при решении уравнений. Сегодня вы легко решаете линейные уравнения. Но после разложения на множители левой части, например, уравнения

$$5x^2 - 3x = 0,$$

не являющегося линейным, вы сможете решить и его. Действительно,

$$5x^2 - 3x = x(5x - 3),$$

поэтому исходное уравнение можно заменить на такое:

$$x(5x - 3) = 0.$$

Вы знаете, что если произведение двух чисел равно нулю, то хотя бы одно из них ноль. Поэтому корнями рассматриваемого уравнения будут числа 0 и $\frac{3}{5}$.

Вы познакомитесь в этой главе с формулами *разности квадратов двух чисел*, *квадратов суммы и разности двух чисел* и др. Эти формулы позволяют раскладывать многочлены определённого вида на множители и упрощать отдельные вычисления. Например, следуя порядку выполнения действий при нахождении значения выражения

$$259^2 - 258^2,$$

нужно первоначально возводить в квадраты числа 259 и 258, затем находить разность полученных пятизначных чисел. Зная же формулу разности квадратов

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

вычисления можно провести даже устно:

$$259^2 - 258^2 = (259 - 258)(259 + 258) = 1 \cdot 517 = 517.$$

Формулы квадратов и кубов суммы (разности) чисел часто используются в приближённых вычислениях.

§ 19 Вынесение общего множителя за скобки

В предыдущей главе было показано, что в результате умножения многочленов получается многочлен. Часто приходится решать обратную задачу о представлении многочлена в виде произведения одночленов и многочленов, т. е. решать задачу о разложении многочлена на множители. При решении этой задачи пытаются найти общий множитель, содержащийся во всех членах многочлена. Если такой множитель имеется, то на основании распределительного закона умножения его выносят за скобки, преобразуя тем самым многочлен в произведение. Этому вы научитесь при рассмотрении данного параграфа.

Нужно вспомнить:

- переместительный и распределительный законы умножения;
- умножение одночлена на одночлен; на многочлен;
- деление одночлена и многочлена на одночлен;
- свойства степеней;
- понятие противоположного числа;
- правила раскрытия скобок и заключения в скобки;
- представление натурального числа N в виде $N = pn + k$, где k — остаток от деления N на натуральное число n $(k < n)$.

Задача 1. Найти числовое значение выражения $ab + ac - ad$ при $a = 43$, $b = 26$, $c = 17$, $d = 23$.

► Используя распределительное свойство умножения, данный многочлен можно представить в виде произведения одночлена и многочлена: $ab + ac - ad = a(b + c - d)$.

Теперь легко провести вычисления:

$$43(26 + 17 - 23) = 43 \cdot 20 = 860. \triangleleft$$

Разложить многочлен $ab + ac - ad$ на множители удалось потому, что все члены этого многочлена имеют общий множитель a. Применяя распределительное свойство умножения, этот множитель можно вынести за скобки.

Приведём другие примеры вынесения общего множителя за скобки:

1) $19a - 38b = 19 \cdot a - 19 \cdot 2b = 19(a - 2b)$;
2) $3a^2b + 4bc^3 = b \cdot 3a^2 + b \cdot 4c^3 = b(3a^2 + 4c^3)$;
3) $6ab + 3b - 12bc = 3b \cdot 2a + 3b \cdot 1 - 3b \cdot 4c = 3b(2a + 1 - 4c)$.

Если все члены многочлена содержат общий множитель, то этот множитель можно вынести за скобки.

В скобках остаётся многочлен, полученный от деления данного многочлена на этот общий множитель.

Задача 2. Разложить на множители многочлен $28x^2y^4 - 21x^3y^2$.

▶ Если коэффициенты членов многочлена — целые числа, то для нахождения общего множителя следует найти наибольший общий делитель модулей коэффициентов членов многочлена, а среди степеней с одинаковым основанием — степень с наименьшим показателем.

В многочлене $28x^2y^4 - 21x^3y^2$ число 7 — наибольший общий делитель чисел 28 и 21; x^2 и y^2 — степени с наименьшими показателями. Поэтому общим множителем членов многочлена является одночлен $7x^2y^2$. Вынося этот множитель за скобки, получаем:

$$28x^2y^4 - 21x^3y^2 = 7x^2y^2 \cdot 4y^2 - 7x^2y^2 \cdot 3x = 7x^2y^2(4y^2 - 3x).$$

Здесь $4y^2$ и $-3x$ получаются делением членов данного многочлена на их общий множитель $7x^2y^2$. ◁

Итак, чтобы разложить многочлен на множители вынесением общего множителя за скобки, нужно:

1) найти этот общий множитель;
2) вынести его за скобки.

Правильность разложения многочлена на множители можно проверить умножением полученных множителей.

Иногда при разложении алгебраического выражения на множители за скобки выносят многочлен. Например:

$$a(2b+3) + b(2b+3) = (2b+3)(a+b).$$

Иногда полезно применить равенство $(a-b) = -(b-a)$. Например:

$$(a-3)x - (3-a)y = (a-3)x + (a-3)y = (a-3)(x+y).$$

Устные вопросы и задания

1. На основании какого закона осуществляется действие вынесения общего множителя за скобки?
2. Как найти многочлен, остающийся в скобках, после вынесения за скобки общего множителя?
3. Сформулировать алгоритм разложения многочлена на множители способом вынесения общего множителя за скобки.
4. Как проверить правильность выполнения разложения многочлена на множители?
5. Какие преобразования выражения $a - b$ следует выполнить, чтобы доказать, что $a - b = -(b - a)$?

Вводные упражнения

1. Найти рациональным способом значение выражения:

1) $37 \cdot 0{,}01 + 0{,}01 \cdot 63$; 2) $\frac{2}{3} \cdot 49 - 19 \cdot \frac{2}{3}$.

2. Выполнить деление:

1) $6a^3b^2 : (2ab^2)$; 2) $15x^4y^6z : (-5x^3y^3)$; 3) $(x-y) : (x-y)$;

4) $(y-z) : (z-y)$; 5) $8(a-b) : (b-a)$; 6) $3(x+y) : (-x-y)$;

7) $(-10a^{10}b^8 + 25a^4b^7 - 5a^4b^6) : (-5a^4b^6)$;

8) $(48x^5y^3 - 18x^4y^6z) : (6x^4y^3)$.

Упражнения

318. Применить распределительный закон умножения и вычислить:

1) $14\frac{3}{8} \cdot 1\frac{1}{4} - 4\frac{3}{8} \cdot 1\frac{1}{4}$; 2) $24 \cdot 2{,}73 + 41 \cdot 2{,}73$.

Вынести за скобки общий множитель **(319—326)**.

319. 1) $2m + 2n$; 2) $3a - 3x$; 3) $8 - 4x$; 4) $6a + 12$.

320. 1) $9a + 12b + 6$; 2) $21a - 7b + 42$; 3) $9x - 3y + 15z$.

321. 1) $ax - ay$; 2) $cd + bc$; 3) $xy + x$; 4) $x - xy$.

322. 1) $9mn + 9n$; 2) $3bd - 3b$; 3) $11z - 33yz$; 4) $6pk - 3p$.

323. 1) $a^4 + 2a^2$; 2) $a^4 - 3a^3$; 3) $a^4b^2 + ab^3$; 4) $x^2y^3 - x^3y^2$.

324. 1) $9a^2b^2 - 12ab^3$; 2) $20x^3y^2 + 4x^2y$.

325. 1) $4a^2b^2 + 36a^2b^3 + 6ab^4$; 2) $2x^2y^4 - 2x^4y^2 + 6x^3y^3$.

326. 1) $ab - ac + a^2$; 2) $xy - x^2 + xz$; 3) $6a^2 - 3a + 12ba$; 4) $4b^2 + 8ab - 12a^2b$.

327. Вычислить:

1) $187^2 - 187 \cdot 87$; 2) $0{,}7^3 + 0{,}7 \cdot 9{,}51$; 3) $0{,}9^3 - 0{,}81 \cdot 2{,}9$.

Разложить на множители **(328—333)**.

328. 1) $a(m+n) + b(m+n)$; 2) $b(a+5) - c(a+5)$;

3) $a(b-5) - (b-5)$; 4) $(y-3) + b(y-3)$.

329. 1) $2a(a-b) + 3b(a-b)$; 2) $3n(m-3) + 5m(m-3)$;

3) $5a(x+y) - 4b(x+y)$; 4) $7a(c-d) - 2b(c-d)$.

330. 1) $a^2(x-y) + b^2(x-y)$; 2) $a^2(x+y) + b^3(x+y)$;

3) $a(x^2+y^2) - b(x^2+y^2)$; 4) $x(a^2+2b^2) + y(a^2+2b^2)$.

331. 1) $c(a-b)+b(b-a)$; 2) $a(b-c)-c(c-b)$;
3) $(x-y)+b(y-x)$; 4) $2b(x-y)-(y-x)$.

332. 1) $7(y-3)-a(3-y)$; 2) $6(a-2)+a(2-a)$;
3) $b^2(a-1)-c(1-a)$; 4) $a^2(m-2)+b(2-m)$.

333. 1) $a(b-c)+d(b-c)-7(c-b)$; 2) $x(a-2)+y(2-a)+(2-a)$;
3) $x(x-y)+y(y-x)-3(x-y)$; 4) $a(b-3)+(3-b)-b(3-b)$.

334. Найти значение выражения:
1) $7(a-5)-b(5-a)$ при $a=2$, $b=3$;
2) $a(a-b)+b(b-a)$ при $a=6{,}3$, $b=2{,}3$;
3) $2x(x+y)-3y(x+y)+7(x+y)$ при $x=4$, $y=5$;
4) $x(y-x)-y(x-y)-4(y-x)$ при $x=3$, $y=-5$.

Разложить на множители **(335—336)**.

335. 1) $3(x+y)(x-y)-(x+y)^2$; 2) $5(a-b)^2-(a+b)(b-a)$;
3) $(x+y)^3-x(x+y)^2$; 4) $a(a-b)^2-(b-a)^3$.

336. 1) $x^2(x-3)-x(x-3)^2$; 2) $a^3(2+a)+a^2(2+a)^2$;
3) $3m(n-m)^2-9m^2(m-n)$; 4) $15p^2(p+q)-5p(p+q)^2$.

337. Решить уравнение:
1) $x^2-2x=0$; 2) $3x+x^2=0$; 3) $5x^2+3x=0$;
4) $x^2(x-2)-2x(x-2)^2=0$; 5) $3x(1-x)^2-x^2(1-x)=0$.

338. Доказать, что если при делении натурального числа на 225 остаток равен 150, то это число делится нацело на 75.

Разговор о важном

После выполнения упражнения № 338 я понял, что умение раскладывать многочлен на множители помогает в решении задач на делимость. Профессор, а у Вас есть в запасе интересные задачи на делимость, где нужно применить вынесение за скобки общего множителя?

Думаю, что ты и сам при желании сможешь придумать задачи, аналогичные следующим двум.
1. Доказать, что при любом натуральном n число n^2+n чётное.
2. Не производя вычислений, показать, что значение выражения $3^{45}-2\cdot 3^{43}$ делится на 7.

Вторую задачу я знаю как решать, а вот первую нет. Что мне даёт разложение двучлена n^2+n на множители n и $(n+1)$?

Скажи, а как расположены числа n и $n+1$ в ряду натуральных чисел?

Они стоят рядом, значит одно из них будет чётным. Произведение двух чисел, одно из которых чётное, само будет чётным. Доказали.

Как решить ещё одну интересную задачу с помощью вынесения общего множителя за скобки, я покажу сам.

Докажем, что число вида $\overline{abcabc}$ делится на 11.

● $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} = \overline{abc}(1000 + 1) = \overline{abc} \cdot 1001 = \overline{abc} \cdot 11 \cdot 91$, поэтому данное число делится на 11. ○

§ 20 Способ группировки

Если все члены многочлена имеют общий множитель, то вынесением этого множителя за скобки многочлен преобразуется в произведение. Этому действию вы научились, изучая предыдущий параграф. Иногда удаётся разложить на множители многочлен, все члены которого не имеют общего множителя, но у отдельных групп которого общие множители имеются. С разложением многочлена на множители способом группировки вы и познакомитесь в этом параграфе.

Нужно вспомнить:

- переместительный, сочетательный и распределительный законы сложения и умножения;
- деление одночлена и многочлена на одночлен;
- вынесение общего множителя за скобки;
- приведение подобных членов;
- решение линейных уравнений с одним неизвестным;
- условие равенства нулю произведения двух и более чисел.

Задача. Разложить на множители многочлен $2a + bc + 2b + ac$.

► Все члены многочлена не имеют общего множителя. Однако этот многочлен можно разложить на множители, если сгруппировать попарно члены многочлена так:

$$2a + bc + 2b + ac = (2a + 2b) + (bc + ac) =$$
$$= 2(a + b) + c(b + a) = (a + b)(2 + c). \triangleleft$$

Выполненные преобразования основаны на применении переместительного, сочетательного и распределительного законов сложения и умножения. Рассмотрим другие примеры.

$$3mx - my + 3nx - ny = (3mx - my) + (3nx - ny) =$$
$$= m(3x - y) + n(3x - y) = (3x - y)(m + n).$$

$$ab - ac - 5b + 5c = (ab - ac) - (5b - 5c) =$$
$$= a(b - c) - 5(b - c) = (b - c)(a - 5).$$

Иногда группировку членов многочлена можно проводить различными способами. Например, разложение многочлена $2am + 2an - 3bm - 3bn$ на множители можно выполнить так:

1-й способ

$$2am + 2an - 3bm - 3bn =$$
$$= (2am + 2an) - (3bm + 3bn) =$$
$$= 2a(m + n) - 3b(m + n) =$$
$$= (m + n)(2a - 3b).$$

2-й способ

$$2am + 2an - 3bm - 3bn =$$
$$= (2am - 3bm) + (2an - 3bn) =$$
$$= m(2a - 3b) + n(2a - 3b) =$$
$$= (2a - 3b)(m + n).$$

Рассмотрим пример разложения на множители многочлена, состоящего из шести членов:

$$ax + bx - ay - by + az + bz = (ax + bx) - (ay + by) + (az + bz) =$$
$$= x(a + b) - y(a + b) + z(a + b) = (a + b)(x - y + z).$$

Здесь члены многочлена сгруппированы по два, но можно было их сгруппировать по три:

$$ax + bx - ay - by + az + bz = (ax - ay + az) + (bx - by + bz) =$$
$$= a(x - y + z) + b(x - y + z) = (x - y + z)(a + b).$$

Итак, способ группировки обычно применяют к многочленам, которые не имеют общего множителя для всех членов многочлена.

Чтобы разложить многочлен на множители способом группировки, нужно:

1) объединить члены многочлена в такие группы, которые имеют общий множитель в виде многочлена;
2) вынести этот общий множитель за скобки.

Устные вопросы и задания

1. На основании каких свойств действий сложения и умножения выполняется разложение многочлена на множители способом группировки?
2. Перечислить этапы разложения многочлена на множители способом группировки.

Вводные упражнения

1. Разложить на множители многочлен:

1) $15x^3yz^2 - 12x^2z^3 + 18xy^2z^4$; 2) $-7a^5b^6c^3 + 21b^5c^2 - 105a^4c^6$.

2. Вычислить рациональным способом:

1) $0{,}3 \cdot 97{,}6 + 2{,}4 \cdot 0{,}3$; 2) $289 \cdot 154 - 154 \cdot 89$.

3. Решить уравнение:

1) $5x - 3 = 6$; 2) $4x + 7 = 6x + 5$;

3) $(x-1)(x+2) = 0$; 4) $(2x+3)(x-4) = 0$.

Упражнения

Разложить на множители (**339—342**).

339. 1) $a + b + c(a+b)$; 2) $m - n + p(m-n)$;

3) $x + 3a(x+y) + y$; 4) $x + 2a(x-y) - y$.

340. 1) $2m(m-n) + m - n$; 2) $4q(p-1) + p - 1$;

3) $2m(m-n) + n - m$; 4) $4q(p-1) + 1 - p$.

341. 1) $ac + bc - 2ad - 2bd$; 2) $ac - 3bd + ad - 3bc$;

3) $2bx - 3ay - 6by + ax$; 4) $5ay - 3bx + ax - 15by$.

342. 1) $18a^2 - 27ab + 14ac - 21bc$; 2) $10x^2 + 10xy + 5x + 5y$;

3) $35ax + 24xy - 20ay - 42x^2$; 4) $48xz^2 + 32xy^2 - 15yz^2 - 10y^3$.

Разложить многочлен на множители и результат проверить умножением (**343—344**).

343. 1) $16ab^2 - 5b^2c - 10c^3 + 32ac^2$; 2) $6mnk^2 + 15m^2k - 14n^3k - 35mn^2$;

3) $-28ac + 35c^2 - 10cx + 8ax$; 4) $-24bx - 15c^2 + 40bc + 9cx$.

344. 1) $xy^2 - by^2 - ax + ab + y^2 - a$; 2) $ax^2 - ay - bx^2 + cy + by - cx^2$;

3) $a^2x^2 - bx^2 + a^2x - bx + a^2y - by$;

4) $ax^2 - bx^2 + ay - by - ax + bx$.

345. Найти значение выражения:

1) $5a^2 - 5ax - 7a + 7x$ при $x = -3$, $a = 4$;

2) $m^2 - mn - 3m + 3n$ при $m = 0{,}5$, $n = 0{,}25$;

3) $a^2 + ab - 5a - 5b$ при $a = 6{,}6$, $b = 0{,}4$;

4) $a^2 - ab - 2a + 2b$ при $a = \frac{7}{20}$, $b = 0{,}15$.

346. Вычислить:

1) $139 \cdot 15 + 18 \cdot 139 + 15 \cdot 261 + 18 \cdot 261$;

2) $125 \cdot 48 - 31 \cdot 82 - 31 \cdot 43 + 125 \cdot 83$;

3) $14{,}7 \cdot 13 - 2 \cdot 14{,}7 + 13 \cdot 5{,}3 - 2 \cdot 5{,}3$;

4) $3\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{5} + 4{,}2 \cdot \frac{2}{3} + 3\frac{1}{3} \cdot 2\frac{4}{5} + 2{,}8 \cdot \frac{2}{3}$.

347. Решить уравнение:

1) $(x^2 - 4x) + x - 4 = 0$; 2) $(x^2 + 7x) - 4x - 28 = 0$;

3) $5x^2 - 10x + (x - 2) = 0$; 4) $3x^2 + 12x - (x + 4) = 0$.

348. Разделить разность многочленов $x^3 - 3x^2$ и $2x^2 - 6x$ на $x - 2$.

Разложить многочлен на множители **(349—350)**.

349. 1) $x^2 + 3x + 2$; 2) $x^2 - 5x + 6$;

3) $x^2 - 7x - 8$; 4) $x^2 + 9x - 10$.

350. 1) $a^3 + 2a^2 - 3$; 2) $x^3 - 7x + 6$;

3) $a^4 + 2a^3 + 1$; 4) $2a^4 - a^2 - 1$.

Разговор о важном

В последних двух упражнениях из этого параграфа трудно подобрать одночлен, который нужно добавить, а затем вычесть, чтобы получить четырёхчлен, удобный для применения способа группировки.

Ничего, эти упражнения очень полезны для развития интуиции и сообразительности. А в 8 классе вы узнаете формулы, с помощью которых сможете такие трёхчлены быстро раскладывать на множители.

Профессор, а Вы можете привести пример практического применения способа группировки?

Примеров много. Покажу, как группировка слагаемых существенно облегчает вычисления и позволяет решать задачи на делимость.

Докажем, что сумма всех натуральных чисел от 1 до 1000 делится на 143.

● $\underline{1} + \underline{\underline{2}} + 3 + \ldots + 998 + \underline{\underline{999}} + \underline{1000} =$

$= (1 + 1000) + (2 + 999) + (3 + 998) + \ldots + (500 + 501) =$

$= 1001 \cdot 500 = 143 \cdot 7 \cdot 500$,

а это произведение делится на 143. ○

§ 21 Формула разности квадратов

Формула разности квадратов относится к группе так называемых формул сокращённого умножения. Само название этих формул говорит об их важности для упрощения выражений и нахождения их числовых значений.

Нужно вспомнить:

- понятие квадрата числа;
- свойства степеней;
- умножение многочлена на многочлен;
- приведение подобных членов;
- формулы площадей прямоугольника и квадрата.

Умножим сумму двух чисел на их разность:

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2,$$

т. е.

$$\boldsymbol{(a+b)(a-b)=a^2-b^2} \qquad (1)$$

или

$$\boldsymbol{a^2-b^2=(a-b)(a+b).} \qquad (2)$$

! Разность квадратов двух чисел равна произведению разности этих чисел и их суммы.

В равенствах (1) и (2) a, b — любые числа или алгебраические выражения, например:

$$(nm+3k)(nm-3k)=n^2m^2-9k^2;$$
$$4a^4b^2-25=(2a^2b-5)(2a^2b+5);$$
$$(a+b)^2-16=(a+b-4)(a+b+4).$$

Формулу (1) называют **формулой сокращённого умножения.** Она применяется для упрощения вычислений, например:

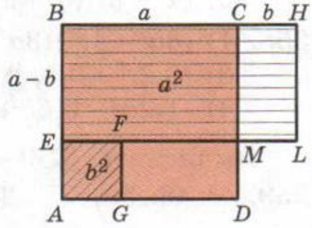
$$63\cdot57=(60+3)(60-3)=3600-9=3591;$$
$$98\cdot102=(100-2)(100+2)=100^2-2^2=9996.$$

Формулу (2) называют **формулой разности квадратов.** Она применяется при разложении многочленов на множители, например:

$$a^2-9=(a-3)(a+3);$$
$$4b^4-0{,}64c^2=(2b^2)^2-(0{,}8c)^2=(2b^2-0{,}8c)(2b^2+0{,}8c);$$
$$(a-b)^2-1=(a-b-1)(a-b+1);$$
$$(a+b)^2-(a-c)^2=(a+b-a+c)(a+b+a-c)=(b+c)(2a+b-c).$$

Устные вопросы и задания

1. Прочитать формулу разности квадратов двух чисел.
2. Чему равно произведение разности чисел m и n на их сумму?
3. Привести пример упрощения вычислений с помощью формулы разности квадратов.
4. С помощью рисунка 15 обосновать формулу разности квадратов двух чисел.



$$AB = BC = a$$
$$S_{ABCD} = a^2$$
$$S_{AEFG} = b^2$$
$$S_{GFEBCD} = S_{EBHL}$$
$$S_{GFEBCD} = a^2 - b^2$$
$$S_{EBHL} = (a - b)(a + b)$$

Рис. 15

Вводные упражнения

1. (Устно.) Записать в виде квадрата числа:
1) 81; 2) 256; 3) 0,36; 4) 14400.

2. Представить в виде квадрата одночлена:
1) a^4; 2) b^6; 3) a^2b^8; 4) x^2y^{10}.

3. Записать в виде многочлена стандартного вида результат умножения:
1) $(x-7)(x-7)$; 2) $(a-b)(a-b)$; 3) $(m-2)(m+1)$;
4) $(-2x+3)(x-4)$; 5) $(3a-5b)(b-6a)$; 6) $(3m-n)(3m+n)$.

4. Разложить на множители:
1) $k^6n^4 - k^3n^2$; 2) $42a^3b^4 - 12abc$; 3) $3b + 12 - ab - 4a$.

Упражнения

351. Представить в виде квадрата одночлена:
1) $4a^2$; $9b^2$; $16c^2$; $0{,}04x^2$; 2) $\frac{1}{9}a^2b^2$; $0{,}25x^2y^2$; $0{,}16m^4$; $0{,}81n^6$;
3) $0{,}01a^4b^2$; $\frac{9}{16}x^2y^4$; $\frac{25}{49}x^6z^4$; $1\frac{9}{16}m^4n^6$.

Разложить на множители **(352—355)**.

352. 1) $25x^2 - 9$; 2) $4a^2 - 9$; 3) $64y^2 - 36x^2$; 4) $81a^2 - 16b^2$.

353. 1) $\frac{1}{9}y^2 - \frac{16}{25}x^2$; 2) $\frac{4}{9}a^2 - \frac{1}{16}b^2$;
3) $0{,}25a^2 - 0{,}49b^2$; 4) $0{,}09x^2 - 0{,}16y^2$.

354. 1) $36x^2y^2 - 1$; 2) $81a^6 - 49b^4$; 3) $x^2y^4 - 16$; 4) $25a^2 - 9b^6$.

355. 1) $a^4 - b^4$; 2) $a^4 - b^8$; 3) $a^4 - 16$; 4) $b^4 - 81$.

Выполнить умножение **(356—358)**.

356. 1) $(2b+a)(2b-a)$; 2) $(c+3d)(c-3d)$;
3) $(y+6x)(6x-y)$; 4) $(3m-2n)(2n+3m)$.

357. 1) $(c^2+d^2)(c^2-d^2)$; 2) $(a^2+b^3)(a^2-b^3)$;
3) $(x^4-y^3)(y^3+x^4)$; 4) $(m^3-n^3)(m^3+n^3)$.

358. 1) $(3a^2+4b^3)(3a^2-4b^3)$; 2) $(2m^4-5n^2)(5n^2+2m^4)$;
3) $(0{,}2t^3+0{,}5p^4)(0{,}5p^4-0{,}2t^3)$;
4) $(1{,}2a^2-0{,}3b^2)(1{,}2a^2+0{,}3b^2)$.

Вычислить **(359—360)**.

359. 1) $48\cdot 52$; 2) $68\cdot 72$; 3) $43\cdot 37$; 4) $47\cdot 53$.

360. 1) $47\cdot 33$; 2) $44\cdot 36$; 3) $84\cdot 76$; 4) $201\cdot 199$.

Разложить на множители **(361—362)**.

361. 1) $(a+b)^2-c^2$; 2) $(m-n)^2-k^2$;
3) $(a+2b)^2-9a^2$; 4) $(3x-y)^2-4y^2$.

362. 1) $(a-b)^2-(a-c)^2$; 2) $(a+b)^2-(b+c)^2$;
3) $(2a+b)^2-(2b+a)^2$; 4) $(a+3b)^2-(3a+b)^2$.

363. Вычислить:
1) 47^2-37^2; 2) 54^2-44^2; 3) $50{,}7^2-50{,}6^2$;
4) $29{,}4^2-29{,}3^2$; 5) $\left(6\frac{2}{3}\right)^2-\left(5\frac{1}{3}\right)^2$; 6) $\left(7\frac{5}{9}\right)^2-\left(4\frac{4}{9}\right)^2$.

364. Решить уравнение:
1) $(x-1)(x+1)=x^2-2(x-3)$;
2) $3(x+5)-x^2=(2-x)(2+x)$;
3) $(2x+3)(2x+3)-4(x-1)(x+1)=49$;
4) $(3x+1)(3x+1)-(3x-2)(2+3x)=17$.

365. Выполнить умножение:
1) $(3+x)(3-x)(9+x^2)$; 2) $(4x^2+y^2)(2x+y)(2x-y)$;
3) $(x^2+1)(x+1)(x-1)$; 4) $(3a-2b)(3a+2b)(9a^2+4b^2)$.

366. Вычислить:
1) $\dfrac{49^2-21^2}{57^2-15^2}$; 2) $\dfrac{63^2-27^2}{78^2-30^2}$; 3) $\dfrac{40{,}7^2-40{,}6^2}{32{,}3^2-5{,}2^2}$; 4) $\dfrac{51{,}3^2-11{,}3^2}{113{,}9^2-73{,}9^2}$.

367. Доказать, что разность квадратов любого натурального числа (большего 1) и числа, ему предшествующего в ряду натуральных чисел, есть нечётное число.

368. Доказать, что число $(7n+1)^2-(2n-4)^2$ делится на 15 при любом натуральном n.

369. Разложить на множители:
1) $(a+b)^3-(a-b)^3-8b^3$; 2) $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2-a^2$;
3) $(a^4+b^4)^2-(a^4-b^4)^2-a^2b^2$; 4) $9a^4-13a^2b^2+4b^4$.

Шаг вперёд

Снова о делимости

Только что изученная формула разности квадратов поможет нам решить ещё одну полезную задачу на делимость чисел. Докажем, что число n^3-n, где n — натуральное число, делится на 6.

● $n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)=(n-1)n(n+1).$

Итак, заданное число можно представить в виде произведения трёх последовательных натуральных чисел, из которых одно обязательно делится на 3 и хотя бы одно делится на 2. Если произведение делится и на 3, и на 2, то оно делится и на 6 (так как числа 2 и 3 взаимно простые). ○

Решите самостоятельно аналогичные задачи.

1. Докажите, что число n^3+17n при любом натуральном n делится на 6. (П о д с к а з к а. Представьте $17n$ в виде $18n-n$.)

2. Докажите, что при любом натуральном n число n^5-5n^3+4n делится на 120. (П о д с к а з к а. Понадобится способ группировки.)

Диалог об истории

Узоры доказательств

А мне понравилось доказательство формулы разности квадратов с помощью рисунка. Это доказательство придумали Вы, Профессор?

Нет, не я. Помнишь, я рассказывал о том, что алгебра очень долго не отделялась от геометрии, пользовалась её терминами и наглядными образами?

Да, Вы рассказывали о том, как доказывал распределительный закон умножения Евклид, называя буквы отрезками, а произведения двух букв — прямоугольниками.

Так вот, найденные при археологических раскопках древневавилонские тексты свидетельствуют о том, что с формулой разности квадратов учёные были знакомы 4000 лет назад. В некоторых странах эта формула записывалась символами, а в Древней Греции — в геометрической форме, с использованием рисунка.

Мне нравятся красивые и простые доказательства. Хотя, чтобы доказать что-то, нужно хорошо помнить всё, что раньше изучали. Всё новое как бы цепляется за старое, опирается на него. Мне и алгебраические, и геометрические доказательства напоминают бабушкино вязание — петелька за петельку, и получился мне свитер.

Молодец, интересное образное сравнение придумала. А о красоте математических доказательств и о математиках очень хорошо написал английский учёный *Г. Х. Харди (1877—1947)*: «Математик так же, как и художник или поэт, создаёт *узоры*. И если эти узоры более устойчивы, то лишь потому, что они составлены из идей... Узоры математика так же, как узоры художника или поэта, должны быть прекрасны; идеи так же, как цвета или слова, должны гармонически соответствовать друг другу. Красота есть первое требование: в мире нет места для некрасивой математики».

От себя добавлю, что математика, как никакой другой предмет, учит *искусству мыслить*, т. е. учит не только фактам и идеям, но и как *обращаться с идеями*, создавать из них узоры.

§ 22 Квадрат суммы. Квадрат разности

В этом параграфе продолжается изучение формул сокращённого умножения, упрощающих преобразования алгебраических выражений. В параграфе показано применение формул квадрата суммы и квадрата разности для приближённых вычислений, демонстрируется геометрическое обоснование этих формул.

Нужно вспомнить:

- понятия квадрата и куба числа;
- свойства степеней;
- умножение многочлена на многочлен;
- приведение подобных членов;
- понятие противоположного числа;
- разложение многочленов на множители способами вынесения общего множителя за скобки и группировки.

Рассмотрим квадрат суммы двух чисел $(a+b)^2$. Пользуясь правилом умножения многочлена на многочлен, получаем:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

т. е.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \qquad (1)$$

! Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

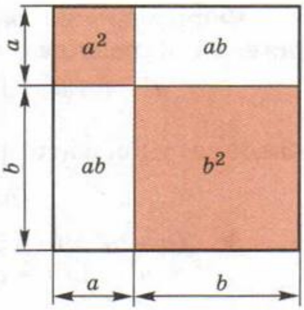


Рис. 16

Заметим, что формулу (1) можно получить, рассматривая площадь квадрата, изображённого на рисунке 16.

Рассмотрим квадрат разности двух чисел: $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=$ $=a^2-2ab+b^2$, т. е.

$$\boldsymbol{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.} \qquad (2)$$

! Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

В равенствах (1) и (2) a и b — любые числа или алгебраические выражения, например:

$$(2m+3k)^2=(2m)^2+2\cdot 2m\cdot 3k+(3k)^2=4m^2+12mk+9k^2;$$

$$(5a^2-3)^2=(5a^2)^2-2\cdot 5a^2\cdot 3+3^2=25a^4-30a^2+9;$$

$$(-a-3b)^2=((-1)(a+3b))^2=(-1)^2(a+3b)^2=$$
$$=(a+3b)^2=a^2+2a\cdot 3b+(3b)^2=a^2+6ab+9b^2.$$

Промежуточный результат можно не писать, производя необходимые вычисления устно. Например, можно сразу написать:

$$(5a^2-7b^2)^2=25a^4-70a^2b^2+49b^4.$$

Формулы квадрата суммы (1) и квадрата разности (2) называют также **формулами сокращённого умножения** и применяют в некоторых случаях для упрощения вычислений, например:

$$99^2=(100-1)^2=10\,000-200+1=9801;$$

$$52^2=(50+2)^2=2500+200+4=2704.$$

Формула (1) применяется также для приближённых вычислений значений выражения $(1+a)^2$. Если модуль числа a мал по сравнению с 1 (например, $a=0{,}0032$ или $a=-0{,}0021$, то число a^2 тем более мало, и поэтому равенство $(1+a)^2=1+2a+a^2$ можно заменить приближённым равенством $(1+a)^2\approx 1+2a$. Например:

$$(1{,}002)^2=(1+0{,}002)^2\approx 1+2\cdot 0{,}002=1{,}004, \text{ т. е. } (1{,}002)^2\approx 1{,}004;$$

$$(0{,}997)^2=(1-0{,}003)^2\approx 1-2\cdot 0{,}003=0{,}994, \text{ т. е. } (0{,}997)^2\approx 0{,}994.$$

Формулы квадрата суммы и квадрата разности иногда применяются к разложению многочленов на множители, например:

$$a^4-8a^2b^3+16b^6=(a^2)^2-2\cdot a^2\cdot 4b^3+(4b^3)^2=(a^2-4b^3)^2.$$

Задача. Доказать формулу

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \qquad (3)$$

▶ $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=$
$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$ ◁

Аналогично доказывается формула

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) называют **формулами куба суммы и куба разности**.

Устные вопросы и задания

1. Прочитать формулу:
   1) квадрата суммы двух чисел; 2) квадрата разности двух чисел;
   3) куба суммы двух чисел; 4) куба разности двух чисел.
2. При каких значениях a и b приближённое равенство $(a+b)^2\approx$ $\approx a^2+2ab$ используют для вычислений?
3. С помощью рисунка 16 обосновать справедливость формулы квадрата суммы.
4. Создать геометрическое обоснование формулы квадрата разности.

Вводные упражнения

1. Найти значение выражения a^2, если a равно: 8; -7; $1\frac{2}{3}$; $-0,9$.
2. Заполнить пропуск одночленом стандартного вида:
   1) $6ab=2\cdot\square$; 2) $-10x^2y=2\cdot\square$; 3) $17xy^3=2\cdot\square$;
   4) $0{,}1ab=2\cdot\square$; 5) $12x^2y=3\cdot\square$; 6) $mn^2=3\cdot\square$.
3. Записать в виде квадрата одночлена:
   1) m^{12}; 2) n^6; 3) $9a^2b^4$; 4) $16x^6y^{10}$.
4. Записать в виде куба одночлена:
   1) m^{12}; 2) n^{21}; 3) $64x^3y^{24}$; 4) $\frac{1}{8}a^6y^{30}$.
5. Разложить на множители:
   1) $-4a^8b+12a^2b^3c$; 2) $-20x^6y-35x^6$;
   3) $7xy-y+21x-3$; 4) $12x^2+6y-2x^2y-y^2$;
   5) $16x^3-xy^2$; 6) $a^3b-25ab^3$.

Упражнения

Представить квадрат двучлена в виде многочлена **(370—373)**.

370. 1) $(c+d)^2$; 2) $(x-y)^2$; 3) $(2+x)^2$; 4) $(x+1)^2$.

371. 1) $(q+2p)^2$; 2) $(3x+2y)^2$; 3) $(6a-4b)^2$; 4) $(5z-t)^2$.

372. 1) $(0{,}2x+0{,}3y)^2$; 2) $(0{,}4b-0{,}5c)^2$;
3) $\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{4}\right)^2$; 4) $\left(\frac{1}{4}a^3-\frac{4}{5}\right)^2$.

373. 1) $(-4ab-5a^2)^2$; 2) $(-3b^2-2ab)^2$; 3) $(4xy+0{,}5y^2)^2$.

Выполнить действия, используя формулы сокращённого умножения **(374—375)**.

374. 1) $(90-1)^2$; 2) $(40+1)^2$; 3) 101^2; 4) 98^2.

375. 1) 72^2; 2) 57^2; 3) 997^2; 4) 1001^2.

376. Применяя формулу $(1+a)^2 \approx 1+2a$, найти приближённое значение числа:
1) $1{,}005^2$; 2) $1{,}004^2$; 3) $1{,}012^2$; 4) $1{,}011^2$;
5) $0{,}992^2$; 6) $0{,}994^2$; 7) $0{,}988^2$; 8) $0{,}989^2$.

Заменить x одночленом так, чтобы получился квадрат двучлена **(377—378)**.

377. 1) a^2+4a+x; 2) $p^2-0{,}5p+x$; 3) $36a^2-x+49b^2$.

378. 1) m^4-3m^2+x; 2) a^2+ab+x;
3) $4a^2-5a+x$; 4) $x+6a+9a^2$.

Разложите на множители многочлен **(379—383)**.

379. 1) $9a^2-6a+1$; 2) $1+2c+c^2$;
3) $36b^2+12b+1$; 4) $81-18x+x^2$.

380. 1) $9x^2+24x+16$; 2) $100-60a+9a^2$;
3) $36m^2+12mn+n^2$; 4) $a^2+10ab+25b^2$.

381. 1) $x^4+2x^2y+y^2$; 2) $p^4-2p^2q+q^2$;
3) $4c^4+12c^2d^3+9d^6$; 4) $25a^6+30a^3b+9b^2$.

382. 1) a^4-8a^2+16; 2) b^4-18b^2+81;
3) $25a^4-10a^2b+b^2$; 4) $16-8a^2b^2+a^4b^4$.

383. 1) $-a^2-2a-1$; 2) $-9+6b-b^2$;
3) $-2a^2+8ab-8b^2$; 4) $-12ab-3a^2-12b^2$.

384. Решить уравнение:
1) $16x^2-(4x-5)^2=15$; 2) $64x^2-(3-8x)^2=87$;
3) $-5x(x-3)+5(x-1)^2=-20$; 4) $(2x-3)^2-(2x+3)^2=12$.

385. Упростить выражение:

1) $(x-y)^2+(x+y)^2$; 2) $(x+y)^2-(x-y)^2$;
3) $(2a+b)^2-(2a-b)^2$; 4) $(2a+b)^2+(2a-b)^2$.

386. Доказать, что:

1) $(a-b)^2=(b-a)^2$; 2) $(-a-b)^2=(a+b)^2$;
3) $(-a-b)(a+b)=-(a+b)^2$; 4) $(a-b)^3=-(b-a)^3$;
5)* $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

387. Найти значение выражения:

1) $5m^2-10mn+5n^2$ при $m=142,\ n=42$;
2) $6m^2+12mn+6n^2$ при $m=56,\ n=44$;
3) $-36a^3+4a^2b-\frac{1}{9}ab^2$ при $a=4,\ b=48$;
4) $-64a^3-8a^2b-\frac{1}{4}ab^2$ при $a=-6,\ b=84$.

388. Вычислить:

1) $101^2-202\cdot 81+81^2$; 2) $37^2+126\cdot 37+63^2$;
3) $\frac{48^2+2\cdot 48\cdot 18+18^2}{48^2-18^2}$; 4) $\frac{85^2-17^2}{85^2+2\cdot 85\cdot 17+17^2}$.

389. Используя формулы куба суммы или куба разности двух чисел, выполнить действие:

1) $(x+2)^3$; 2) $(3-y)^3$; 3) $(2a-b)^3$; 4) $(3b+2a)^3$.

390. Разложить многочлен на множители:

1) $125+75a+15a^2+a^3$; 2) $m^3-12m^2+48m-64$;
3) $x^6-3x^4y+3x^2y^2-y^3$; 4) $c^6+3c^4d^2+3c^2d^4+d^6$.

391. Квадрат двузначного числа содержит нечётное число десятков. Найти цифру единиц этого двузначного числа.

Диалог об истории

Степени бинома

А вы не подметили никаких закономерностей в коэффициентах многочленов, получаемых после возведения суммы $a+b$ во вторую, в третью степени?

Я заметил, что первые и последние коэффициенты равны 1 и что многочлен выглядит как-то симметрично...

Давайте понаблюдаем за коэффициентами многочленов, получаемых возведением двучлена $a+b$ в разные степени. Тем более что вы легко сможете $a+b$ возвести и в четвёртую степень: $(a+b)^4=(a+b)^3(a+b)$, а при необходимости — и в пятую степень.

$$(a+b)^1 = a + b,$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \text{ и т. д.}$$

Следует сказать, что в алгебре двучлен часто называют *биномом* (от лат. bis — дважды и греч. nomen — имя), поэтому коэффициенты многочлена после возведения бинома в степень называют *биномиальными коэффициентами*.

Судя по дошедшим до нас старым рукописям, *Омар Хайям* в XI в., а затем *Насир ад-Дину ат-Туси* в XIII в. знали формулу разложения $(a+b)^n$, где n — любое натуральное число. Ат-Туси составил таблицу для вычисления биномиальных коэффициентов в форме треугольника:

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1..................................1

Известно, что несколько первых строк такой таблицы составлялись ещё во II в. до н. э. в Индии. В наши дни эту таблицу называют *треугольником Паскаля*. Узнаёте в строках треугольника Паскаля коэффициенты рассмотренных многочленов?


Я же говорил, что есть симметрия в записях многочленов после возведения двучлена в степень.


Ты абсолютно прав. «Треугольник» коэффициентов похож на равнобедренный. Но заметили ли вы любопытное свойство чисел в его строчках? Если рассмотреть два любых соседних числа в одной строке, то в следующей строке под этими числами вы увидите число, равное их сумме.


Теперь я могу легко написать следующие строчки треугольника. Например, шестая строка будет такой:

1 6 15 20 15 6 1.


Верно. А если ты понял, как ведут себя показатели степеней a и b в слагаемых многочлена, то сможешь записать результат возведения бинома в 6-ю степень.


Попробую не ошибиться: $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. Я вспомнил, что мой старший брат в сочетании со словом *бином* произносит фамилию *Ньютона*. Но вы сказали, что этими формулами занимались ещё в XI—XIII вв. Хайям и ат-Туси, а Ньютон жил позже, в XVII—XVIII вв.

Ты очень наблюдателен и обладаешь хорошей памятью, Тёма! Формула разложения бинома действительно носит имя Ньютона, и вполне заслуженно.

В Средние века мусульманские и христианские народы были разобщены. Поэтому ранние достижения математиков из стран ислама стали известны в Европе через столетия, когда европейцы уже самостоятельно пришли ко многим открытиям и продвинулись в них дальше, чем учёные Востока. Так, Ньютон использовал в своих трудах формулу для разложения бинома $(a+b)^{\alpha}$, где α — любое, не только натуральное число. А *Блез Паскаль (1623—1662)* в «Трактате об арифметическом треугольнике» описал теорию составления треугольника биномиальных коэффициентов.

§ 23 Применение нескольких способов разложения многочлена на множители

В параграфе обосновываются формулы разложения на множители суммы кубов и разности кубов. Показано применение комбинации приёмов разложения многочленов на множители.

Нужно вспомнить:

- формулу разности квадратов и формулы сокращённого умножения;
- способы разложения многочлена на множители:
  1) вынесением за скобки общего множителя;
  2) способом группировки;
  3) с помощью формул сокращённого умножения.

При разложении многочленов на множители иногда используется не один, а несколько способов. Приведём примеры.

$$a^3 - a = a\,(a^2 - 1) = a\,(a - 1)\,(a + 1).$$

Здесь было использовано два способа: вынесение общего множителя за скобки и применение формулы разности квадратов.

$$(a^2+1)^2 - 4a^2 = ((a^2+1) - 2a)\,((a^2+1) + 2a) =$$
$$= (a^2 + 1 - 2a)(a^2 + 1 + 2a) = (a^2 - 2a + 1)\,(a^2 + 2a + 1) = (a-1)^2\,(a+1)^2.$$

Здесь сначала использовалась формула разности квадратов, затем были применены формулы квадрата суммы и разности.

$$4x^2 - y^2 + 4x + 2y = (4x^2 - y^2) + (4x + 2y) =$$
$$= (2x - y)(2x + y) + 2(2x + y) = (2x + y)(2x - y + 2).$$

В этом примере используется способ группировки, формула разности квадратов и вынесение общего множителя за скобки.

Эти примеры показывают, что при разложении многочленов на множители полезно соблюдать следующий порядок:

1) вынести общий множитель за скобку (если он есть);
2) попробовать разложить многочлен на множители по формулам сокращённого умножения;
3) попытаться применить способ группировки (если предыдущие способы не привели к цели).

Задача. Доказать равенство

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2). \qquad (1)$$

▶ Преобразуем правую часть равенства:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Правая часть равенства оказалась равной левой части, т. е. равенство (1) доказано. ◁

Аналогично доказывается равенство

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2). \qquad (2)$$

Равенства (1) и (2) называют **формулами суммы и разности кубов**. Иногда эти формулы применяются при разложении многочленов на множители. Например:

$$27 + b^3 = (3 + b)(9 - 3b + b^2);$$
$$x^4 - 8xy^3 = x(x^3 - 8y^3) = x(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2).$$

Устные вопросы и задания

1. Назвать последовательность попыток разложения многочлена на множители.
2. Прочитать формулы суммы и разности кубов чисел m и n.

Вводные упражнения

1. Разложить на множители:
   1) $27a^3b^2c^5 - 36a^2b^4c^3$;
   2) $16x^7y^5z^3 - 72y^6z^2$;
   3) $6ab + 3a - 10b - 5$;
   4) $-18x^2 + 12x - 3xy + 2y$;
   5) $a^2 - 6ab + 9b^2$;
   6) $4x^2 + 20x + 25$;
   7) $100a^2 - 81b^2$
   8) $18x^3y - 8xy^3$.

2. Решить уравнение:

1) $(x-1)(x+3)=0$; 2) $(2x-3)^2=0$;

3) $x^2-2x=0$; 4) $x^2+12x+36=0$.

Упражнения

Разложить на множители **(392—396)**.

392. 1) $2a^2-2$; 2) $3x^2-12$; 3) $9x^3-81x$;
4) $16x-4x^3$; 5) $8-72x^6y^2$; 6) $32a^4b-2a^2b$.

393. 1) $2a^2+4ab+2b^2$; 2) $2m^2+2n^2-4mn$;
3) $5x^2+10xy+5y^2$; 4) $8p^2-16p+8$;
5) $27a^2b^2-18ab+3$; 6) $12m^5n+24m^4n+12m^3n$.

394. 1) $(x^2+1)^2-4x^2$; 2) $(x^2+2x)^2-1$;
3) $4y^2-(y-c)^2$; 4) $81-(y^2+6y)^2$.

395. 1) $(a^2+2ab+b^2)-c^2$; 2) $1-(x^2-2xy+y^2)$;
3) $1-a^2-2ab-b^2$; 4) $4-x^2-2xy-y^2$.

396. 1) a^2-b^2+a+b; 2) a^2-b^2-a-b; 3) $x-y-x^2+y^2$;
4) x^3+x^2-x-1; 5) $m^5-m^3+m^2-1$; 6) x^4-x^3+x-1.

Вычислить **(397—398)**.

397. 1) $\dfrac{53^2-27^2}{79^2-51^2}$; 2) $\dfrac{38^2-17^2}{47^2-19^2}$;
3) $\dfrac{49^2-2\cdot49\cdot29+29^2}{49^2-19^2}$; 4) $\dfrac{47^2-3^2}{27^2+2\cdot27\cdot13+13^2}$.

398. 1) $19{,}7^2-8{,}3^2+28\cdot8{,}6$; 2) $37\cdot12{,}2+22{,}4^2-14{,}6^2$;
3) $38{,}8^2+83\cdot15{,}4-44{,}2^2$; 4) $97\cdot2{,}2-99{,}6^2+2{,}6^2$.

399. Доказать равенство:
1) $x^2+2x-y^2+2y=(x+y)(x-y+2)$;
2) $a^2-2b-a-4b^2=(a+2b)(a-2b-1)$.

400. Найти значение выражения:
1) $x^3-x^2y-xy^2+y^3$ при $x=12{,}07$, $y=2{,}07$;
2) $a^3+a^2b-ab^2-b^3$ при $a=7{,}37$, $b=2{,}63$.

401. Решить уравнение:
1) $2x^2-10x+x^2-25=0$; 2) $x^2+4x+4-16x^2=0$;
3) $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=0$; 4) $2x^4-2x^3-2x^2+2x=0$.

402. Доказать, что число 27^2-14^2 делится на 13.

403. Доказать, что при любом целом n значение выражения $(7n-2)^2-(2n-7)^2$ делится на 5; делится на 9.

404. Используя формулы суммы или разности кубов, упростить:
1) $(a-2)(a^2+2a+4)$; 2) $(b+x)(b^2-bx+x^2)$;
3) $(2a+3)(4a^2-6a+9)$; 4) $(a^2-1)(a^4+a^2+1)$.

405. Разложить на множители:
1) $27a^3-b^3$; 2) x^3y^3+64; 3) $8m^3+n^9$; 4) c^6-125d^3.

406. Разложить на множители трёхчлен:
1) x^3+x^2-12; 2) a^3-7a+6.

407. Доказать, что разность кубов любого натурального числа (большего 1) и числа, ему предшествующего в ряду натуральных чисел, не делится на 3.

Шаг вперёд

Профессор, мы решали уже немало задач на доказательство того, что некоторое число, записанное с помощью букв, будет делиться на другое число. А в упражнении 407 требовалось доказать, что число *не делится* на 3. Я показал, что его нельзя представить в виде $3k$, где k — натуральное число:

$$n^3-(n-1)^3=n^3-n^3+3n^2-3n+1=3(n^2-n)+1=3k+1.$$

Здесь я обозначил большее из двух натуральных чисел буквой n, а разность n^2-n — буквой k.

Ты всё сделал абсолютно верно. Действительно, любое натуральное число по отношению к делению на 3 можно записать в виде $3k$, $3k+1$ или $3k+2$, т. е. при делении на 3 число либо разделится на 3, либо даст в остатке одно из чисел 1 или 2. Ты фактически доказал, что разность кубов данных в задаче чисел при делении на 3 даёт в остатке 1. Зная, как записывается любое натуральное число с помощью делителя, неполного частного и остатка от деления, можно, например, изучать вопрос о делимости на 3 любых выражений, составленных из чисел, делящихся или не делящихся на 3.

Профессор, а можно на конкретной задаче рассмотреть делимость выражения из каких-либо чисел на 3?

Пожалуйста. Давай рассмотрим простую **задачу**.
Докажем, что квадрат любого натурального числа, не делящегося на 3, при делении на 3 даёт в остатке 1.

● Натуральное число, которое не делится на 3, можно представить в виде $3k+1$ или $3k+2$, где k — целое неотрицательное число. Рассмотрим оба случая:

1) $(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3p + 1$, где $p = 3k^2 + 2k$;

2) $(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 9k^2 + 12k + 3 + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 = 3m + 1$, где $m = 3k^2 + 4k + 1$.

Действительно, квадраты рассмотренных чисел при делении на 3 дают в остатке 1. Что и требовалось доказать. ○

Отсюда, в частности, следует, что любое натуральное число вида $3k+2$ нельзя представить в виде квадрата натурального числа. Попробуйте теперь творчески применить результат решения предыдущей задачи для следующей **задачи**.

Даны два числа, не делящиеся на 3. Докажите, что если из квадрата большего из них отнять квадрат меньшего, то получится число, кратное числу 3.

Это интересно

Софизм

Софизмом называют последовательность высказываний, содержащих скрытую ошибку, за счёт чего удаётся сделать неправдоподобный вывод. Обычно в математических софизмах скрыто выполняются запрещённые действия или нарушаются условия применения правил и теорем. Задача заключается в том, чтобы найти ошибки в рассуждениях.

Например, попробуем доказать, что $1 = 2$.

Рассмотрим равенство $a = b$, где a и b отличны от нуля. Умножив обе части этого равенства на b, получим верное равенство:

$$ab = b^2.$$

Отнимем от обеих частей последнего равенства число a^2:

$$ab - a^2 = b^2 - a^2.$$

Разложим левую и правую части этого равенства на множители:

$$a(b-a) = (b-a)(b+a).$$

Разделим обе части равенства на $b - a$, получим:

$$a = b + a.$$

Так как по условию $a = b$, то имеем $a = 2a$. После деления обеих частей последнего равенства на a получаем: $1 = 2$.

Где была допущена ошибка?

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

Разложить на множители **(408—411)**.

408. 1) $6(a+b)+(a+b)^2$; 2) $4(x-y)+3(x-y)^2$;
3) $(a-b)+(b-a)^2$; 4) $(a-b)^2-(b-a)$.

409. 1) $(c-3)^2-(c+3)(3-c)$; 2) $(a+2)^2-(a+2)(2-a)$;
3) $(-b-a)(a+b)+a^2+b^2$; 4) $(b-a)(-a-b)-3b^2$.

410. 1) $2b(x-1)-3a(x-1)+c(x-1)$;
2) $c(p-q)-a(p-q)+b(p-q)$.

411. 1) $8ax+16ay-3bx-6by$; 2) $14am-7an+8bm-4bn$;
3) $9a^2+6a+1-4b^2$; 4) $25a^2-4b^2+4b-1$.

412. Вычислить:
1) $287^2-287\cdot48+239\cdot713$; 2) $73{,}4^2+73{,}4\cdot17{,}2-90{,}6\cdot63{,}4$.

413. Упростить выражение и найти его числовое значение:
1) $\left(4c+\frac{1}{4}x\right)\left(4c-\frac{1}{4}x\right)+\left(4c-\frac{1}{4}x\right)^2$ при $c=\frac{1}{2}$, $x=2$;
2) $(0{,}1a-0{,}2b)^2+(0{,}1a-0{,}2b)(0{,}1a+0{,}2b)$ при $a=-50$, $b=-1\frac{2}{3}$.

414. Доказать, что при любых значениях x и y верно равенство:
1) $(x+y)(x^2-y^2)=(x-y)(x+y)^2$;
2) $(x-2y)(x+2y)(x^2+4y^2)=x^4-16y^4$.

415. Разложить на множители многочлен:
1) $mn-kn-m^2+2mk-k^2$; 2) $c^2-2c+1-d^2-2de-e^2$.

416. Разложить на множители:
1) $(x^2-1)^2-(x^2+2)^2$; 2) $(5+x^2)^2-(7+x^2)^2$;
3) $(3x-1)^2-(5-2x)^2$; 4) $(7+5x)^2-(3x-2)^2$.

417. Решить уравнение:
1) $(3x-1)^2-(3x-2)^2=0$; 2) $(y-2)(y+3)-(y-2)^2=5$;
3) $(x+3)(y+7)-(x+4)^2=0$; 4) $(y+8)^2-(y+9)(y-5)=117$;
5) $(3x+2)(3x-2)-(3x-4)^2=28$.

418. Ширина прямоугольника меньше стороны квадрата на 12 м, а длина этого прямоугольника больше стороны того же квадрата на 12 м. Сравнить площади прямоугольника и квадрата.

419. Скорость пассажирского поезда равна 60 км/ч, а товарного — 40 км/ч. Найти расстояние между двумя пунктами, если пассажирский поезд проходит это расстояние на 2 ч быстрее, чем товарный.

420. Из города в посёлок выехал мотоциклист со скоростью 60 км/ч. Через полчаса навстречу ему из посёлка выехал другой мотоциклист со скоростью 50 км/ч. Сколько времени ехал второй мотоциклист до встречи с первым, если расстояние между посёлком и городом равно 162 км?

421. С помощью микрокалькулятора найти значение выражения:
1) $a(3{,}478-b)-8(3{,}478-b)$ при $a=72$, $b=2{,}353$;
2) a^2b+ab^2-ab при $a=12{,}5$, $b=-4{,}4$.

422. Записать выражение в виде многочлена:
1) $(a+(b+c))(a-(b+c))$; 2) $(a^2-(b-c))(a^2+(b-c))$.

423. Вычислить:
1) $(2x-1)(4x^2+2x+1)-4x(2x^2-3)$ при $x=0{,}5$;
2) $x(x+2)(x-2)-(x-3)(x^2+3x+9)$ при $x=0{,}25$.

424. Решить уравнение:
1) $(x+2)(x^2-2x+4)-x(x-3)(x+3)=26$;
2) $(x-3)(x^2+3x+9)-x(x+4)(x-4)=21$;
3) $(2x-1)(4x^2+2x+1)-4x(2x^2-3)=23$;
4) $(4x+1)(16x^2-4x+1)-16x(4x^2-5)=17$.

425. 1) Доказать, что если сумма трёх последовательных натуральных чисел есть число нечётное, то их произведение делится на 24.

2) Доказать, что если сумма четырёх натуральных чисел есть число нечётное, то их произведение — число чётное.

426. Верно ли равенство $2b^5+(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)=$ $=(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)(a+b)$?

ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Длина прямоугольника на 5 см больше его ширины. Если длину прямоугольника увеличить на 4 см, а ширину — на 2 см, то площадь увеличится на 42 см^2. Найти длину и ширину данного прямоугольника.

2. Сторона первого квадрата на 13 см больше стороны второго квадрата, а площадь первого квадрата на 351 см^2 больше площади второго квадрата. Найти сторону первого квадрата.

3. Площадь земельного участка, имеющего форму квадрата, на 700 м^2 больше площади другого участка, имеющего прямоугольную форму. Длина участка прямоугольной формы на 10 м больше, а ширина на 25 м меньше стороны участка, имеющего форму квадрата. Найти длину и ширину участка прямоугольной формы.

4. Числовое значение расстояния h (выраженного в метрах), которое пролетает свободно падающее тело за время t (выраженное в секундах) от начала падения, на практике часто вычисляют по формуле $h=5t^2$. Какое расстояние пролетит свободно падающее тело с момента времени T (от начала движения) за 5 с?
5. Даны три последовательных натуральных числа. Произведение первого и второго чисел на 34 меньше квадрата третьего. Найти эти числа.
6. Доказать, что квадрат нечётного числа, уменьшенный на 1, делится на 8.
7. Доказать, что сумма произведения двух последовательных натуральных чисел и большего из них равна квадрату большего числа.
8. Упростить выражение $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)$.
9. Разность кубов каких двух последовательных натуральных чисел равна 331?

В этой главе вы узнали,

что такое:

— разложение многочлена на множители;
— формулы сокращённого умножения;

как:

— раскладывать на множители многочлен:
- способом вынесения за скобки общего множителя;
- способом группировки;
- с помощью формул сокращённого умножения;

— применять различные способы разложения многочлена на множители;
— обосновывать алгебраически и геометрически формулы разности квадратов, квадратов суммы и разности чисел;
— возводить двучлен в третью степень;
— доказывать формулы разности и суммы кубов;
— применять разложение многочленов на множители при решении уравнений;
— применять для приближённых вычислений формулы квадратов суммы (разности) двух чисел и разности квадратов двух чисел.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

1. Представить в виде многочлена стандартного вида выражение $(a+3)^2+(a-3)(a+3)+6a$.
2. Разложить на множители:
а) $xy-2y$; б) $16a^2-81$; в) $3x^2-6x^3$;
г) $x^2-10x+25$; д) $3(x-1)+y(x-1)$; е) $2a^2-4ab+2b^2$.
3. Разложить на множители многочлен $a^2-3ab+3a-9b$ и найти его числовое значение при $a=1$, $b=-\frac{1}{3}$.

II уровень

4. Разложить на множители:
а) $(2-3n)^2-9n^4$; б) $(a-5)^2+2(5-a)+1$;
в) $x^6-x^4-x^2+1$; г) $8b^3-\frac{1}{27}$.
5. Вычислить: $\frac{87^2-13^2}{91^2-34\cdot 91+17^2}$.
6. Решить уравнение $(x-3)^2+(3-x)(x+3)=(x+2)^2-x^2$.

III уровень

7. Разложить на множители: $x^2-7x+12$.
8. Вычислить: $\frac{30^3+19^3}{30^2-570+19^2}$.
9. Указать, при каких значениях a имеет единственный корень уравнение $(x-a)(x+a)=(x-a)^2-2a^2-1$.
10. Доказать, что $(a-2m)^2-a(2m-a)+2m(2m-a)+8am=$ $=16$ при условии, что $a^2+4m^2=8$.
11. Доказать, что значение выражения 27^5-9^6 делится на 26.

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Геометрические доказательства формул сокращённого умножения.
2. Математические софизмы в алгебре.
3. Делимость на 2 и на 3 числовых выражений, содержащих квадраты и кубы различных натуральных чисел.
4. История создания треугольной таблицы биномиальных коэффициентов.
5. Создание пространственной модели, иллюстрирующей формулу $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
6. Биография ат-Туси и его вклад в развитие математики.
7. Разносторонняя научная деятельность Исаака Ньютона.

ГЛАВА V

Алгебраические дроби

С понятием обыкновенной дроби вы знакомы с 5 класса. Умеете выполнять арифметические действия с дробями, сокращать дробь, приводить дроби к общему знаменателю с помощью основного свойства дроби. Хорошо понимаете, что показывают знаменатель дроби (на сколько частей разделено целое) и числитель дроби (сколько частей взято). В связи с этим предлагаем обсудить интересное высказывание *Л. Н. Толстого (1828—1910)* о сравнении человека с дробью.

Он говорил, что человек есть дробь. Числитель — это сравнительно с другими — достоинства человека; знаменатель — это оценка самого себя. Увеличить свой числитель — свои достоинства — не во власти человека, но всякий может уменьшить свой знаменатель — своё мнение о себе, и этим уменьшением приблизиться к совершенству.

По нашему мнению, высказывание Л. Н. Толстого относится к взрослым людям, которые считают, что достигли предела возможностей в развитии своих достоинств. А молодому человеку приближаться к совершенству всегда можно и нужно через увеличение числителя дроби, совершенствуя и развивая хорошие качества. Уменьшением знаменателя — снижением самомнения тоже полезно заниматься. Скромность — хорошее качество. Как вы считаете? Нужно ли быть скромным в оценке своих достоинств? Можно ли и нужно ли взрослым людям заниматься самосовершенствованием?

Возвращаясь к математике, скажем, что понятие алгебраической дроби и действия с алгебраическими дробями (чем вам предстоит заниматься в этой главе учебника) не будут вызывать у вас проблем, так как с обыкновенными дробями вы знакомы хорошо, а числителем и знаменателем алгебраической дроби являются многочлены, с которыми вы недавно научились работать.

§ 24 Алгебраическая дробь. Сокращение дробей

Из-за того что в арифметике не всегда получалось деление нацело одного числа на другое, придумали обыкновенные дроби. А так как в алгебре не всегда получалось деление нацело многочлена на многочлен, ввели алгебраические дроби. Действия с обыкновенными и алгебраическими дробями не имеют существенных различий, так как в алгебре под буквами подразумеваются числа. В этом вы убедитесь при обобщении основного свойства дроби, которое будет рассмотрено в этом параграфе.

Нужно вспомнить:

- понятие обыкновенной дроби;
- основное свойство обыкновенной дроби;
- решение линейных уравнений;
- условие равенства нулю произведения двух и более чисел;
- способы разложения многочлена на множители;
- понятие числа, обратного данному числу;
- понятие числа, противоположного данному числу;
- понятие модуля числа.

Задача 1. Скорость катера в стоячей воде равна a километрам в час, скорость течения реки равна b километрам в час. Во сколько раз скорость движения катера по течению реки больше скорости движения катера против течения?

► Скорость движения катера по течению реки равна $(a+b)$ километрам в час, скорость движения против течения равна $(a-b)$ километрам в час. Поэтому скорость движения катера по течению в $\frac{a+b}{a-b}$ раз больше скорости движения против течения. ◁

! Определение. Выражение $\frac{a+b}{a-b}$ называют **алгебраической дробью.** Числитель этой дроби $a+b$, а её знаменатель $a-b$.

Приведём ещё несколько примеров алгебраических дробей:

$$\frac{a}{b}; \quad \frac{2}{x+y}; \quad \frac{a-b}{c}; \quad \frac{x(b+c)}{y(a-c)}.$$

В алгебраической дроби числитель и знаменатель — алгебраические выражения. Если вместо букв, входящих в алгебраическую дробь, подставить числа, то после вычислений получится значение этой алгебраической дроби. Например, значение алгебраической дроби $\frac{a+b}{a-b}$ при $a=10$, $b=8$ равно $\frac{10+8}{10-8}=\frac{18}{2}=9$.

Условимся в дальнейшем всегда считать, что буквы, входящие в алгебраическую дробь, могут принимать лишь **допустимые значения**, т.е. такие значения, при которых знаменатель этой дроби не равен нулю. Например, для дроби $\frac{a}{a(a-1)}$ допустимыми являются все значения a, кроме $a=0$ и $a=1$.

Так как в алгебраической дроби буквами обозначены некоторые числа, то для алгебраических дробей справедливы основное свойство дроби и правила выполнения действий с обыкновенными дробями.

Основное свойство дроби

$$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}, \text{ где } b\neq0,\ m\neq0.$$

Это свойство означает, что при умножении или делении числителя и знаменателя дроби на одно и то же алгебраическое выражение получается равная ей дробь, например: $\frac{a+b}{b}=\frac{(a+b)c}{bc}$.

Используя основное свойство дроби, можно сокращать алгебраическую дробь на общий множитель, входящий одновременно в числитель и знаменатель дроби, например:

$$\frac{a(b+c)}{a(b-c)}=\frac{b+c}{b-c}; \qquad \frac{(a+b)c}{(a+b)d}=\frac{c}{d}.$$

Приведём примеры дробей, для упрощения которых нужно сначала выделить общий множитель числителя и знаменателя.

Задача 2. Сократить дробь: 1) $\frac{12a^2b}{4ab^2}$; 2) $\frac{m^2-n^2}{m^2+mn}$.

► 1) Одночлены $12a^2b$ и $4ab^2$ имеют общий множитель $4ab$. Разделив числитель и знаменатель на $4ab$, получим: $\frac{12a^2b}{4ab^2}=\frac{3a}{b}$.

2) Разложив числитель и знаменатель данной дроби на множители, получим: $\frac{m^2-n^2}{m^2+mn}=\frac{(m-n)(m+n)}{m(m+n)}$. Сокращая эту дробь на $m+n$, получим: $\frac{(m-n)(m+n)}{m(m+n)}=\frac{m-n}{m}$. ◁

Итак, для сокращения дроби нужно числитель и знаменатель разделить на их общий множитель, считая, что он не равен нулю.

Задача 3. Упростить дробь $\frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)}$.

► $\frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)} = \frac{-3a(x-y)}{a^2(x-y)} = \frac{-3}{a} = -\frac{3}{a}$. ◁

Устные вопросы и задания

1. Чем являются числитель и знаменатель алгебраической дроби?
2. Что называют значением алгебраической дроби?
3. Что такое допустимые значения букв, входящих в алгебраическую дробь?
4. Как найти допустимые значения букв, входящих в алгебраическую дробь?
5. Сформулировать основное свойство дроби.
6. Как сократить алгебраическую дробь?

Вводные упражнения

1. Сократить дробь: 1) $\frac{25}{45}$; 2) $\frac{63}{49}$; 3) $-\frac{77}{99}$; 4) $-\frac{39}{52}$.
2. Заполнить пропуски: 1) $\frac{9}{11} = \frac{36}{\square}$; 2) $\frac{7}{4} = \frac{\square}{60}$.
3. Разложить на множители:
   1) $5a^2 - 20a$; 2) $12a^2b + 18ab^2$; 3) $4x^2 - 25y^2$; 4) $7x^2 - 28$.
4. Решить уравнение:
   1) $(x+7)(2x-5)=0$; 2) $x(2x-3)(x-6)=0$;
   3) $9x^2 - 1 = 0$; 4) $x^3 - 16x = 0$.
5. Найти все значения x, при которых верно равенство:
   1) $|x| = 10$; 2) $|x| = 0{,}7$.
6. Чему равен $|a|$, если: 1) $a > 0$; 2) $a = 0$; 3) $a < 0$?

Упражнения

427. Записать алгебраическую дробь, числитель которой равен разности квадратов чисел a и b, а знаменатель — квадрату разности этих чисел.

428. Записать алгебраическую дробь, числитель которой равен сумме кубов чисел c и d, а знаменатель — удвоенному произведению этих чисел.

429. (Устно.) Найти значение алгебраической дроби:

1) $\frac{x}{4}$ при $x=2$, $x=-8$, $x=\frac{1}{2}$, $x=4{,}24$;

2) $\frac{a}{5}$ при $a=25$, $a=-125$, $a=12{,}5$, $a=0$;

3) $\frac{18}{c-5}$ при $c=8$, $c=-13$, $c=5{,}3$;

4) $\frac{3+2b}{b}$ при $b=-3$, $b=5$, $b=0{,}3$.

430. Найти допустимые значения букв, входящих в дробь:

1) $\frac{3}{a}$; 2) $\frac{-4}{b}$; 3) $\frac{a-b}{a+2}$; 4) $\frac{a+5}{3-a}$.

431. 1) Из формулы $p=2(a+b)$ найти a.
2) Из формулы $s=s_0+vt$ найти v.

432. Используя основное свойство дроби, заменить букву a алгебраическим или числовым выражением так, чтобы равенство было верным:

1) $\frac{-3}{11}=-\frac{a}{33}$; 2) $-\frac{c}{b}=\frac{c^2}{a}$; 3) $\frac{-xy}{x^2z}=-\frac{y}{a}$; 4) $\frac{m^3n}{mn}=\frac{a}{4}$.

433. Показать, что данные две дроби равны:

1) $\frac{6}{7}$ и $\frac{18}{21}$; 2) $\frac{-3}{5}$ и $\frac{27}{-45}$;

3) $\frac{2}{3}$ и $\frac{2a}{3a}$; 4) $\frac{2a}{7b}$ и $\frac{2a^2b}{7ab^2}$.

Сократить дробь **(434—437)**.

434. 1) $\frac{-48}{-56}$; 2) $\frac{-64}{-80}$; 3) $\frac{-121}{55}$; 4) $\frac{28}{-14}$.

435. 1) $\frac{6ab}{-4a}$; 2) $\frac{-14c}{49c}$; 3) $\frac{-a^4b}{-ab^3}$; 4) $\frac{3a^2b}{9a^3}$.

436. 1) $\frac{4(m+n)}{5(m+n)}$; 2) $\frac{7a(a-b)}{5(a-b)}$; 3) $\frac{2b(m-n)}{8b(m-n)(m+n)}$;

4) $\frac{3a(a+b)}{9a(a+b)(a-b)}$; 5) $\frac{2(a-b)}{b-a}$; 6) $\frac{5(x-y)}{15(y-x)}$.

437. 1) $\frac{3m(1-x)}{9m^2(x-1)^2}$; 2) $\frac{8a^2b(a-b)}{4a^3b(b-a)^2}$; 3) $\frac{(a-b)^2}{a-b}$; 4) $\frac{m-n}{(n-m)^2}$.

Разложить на множители числитель и знаменатель дроби и сократить её **(438—446).**

438. 1) $\frac{3x+3y}{6c}$; 2) $\frac{8a}{4m-4n}$; 3) $\frac{12a-3}{6a+9}$; 4) $\frac{ac-bc}{ac+bc}$; 5) $\frac{a+ab}{a-ab}$.

439. 1) $\frac{a^2}{a^2+ab}$; 2) $\frac{pq^3}{p^2q-pq^2}$; 3) $\frac{5k+15f}{3f+k}$; 4) $\frac{3a-6b}{12b-6a}$; 5) $\frac{2m-4n}{16n-8m}$.

440. 1) $\frac{12x^2-30xy}{30x^2-12xy}$; 2) $\frac{36a^2+24ab}{24a^2+36ab}$; 3) $\frac{m^3-3m^2n}{3m^2n-3m^3}$; 4) $\frac{a^3-2a^2b}{2a^3b^2-a^4b}$.

441. 1) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$; 2) $\frac{a-b}{a^2-b^2}$; 3) $\frac{4c^2-9x^2}{2c-3x}$; 4) $\frac{25-x^2}{5-x}$.

442. 1) $\frac{8-3a}{9a^2-64}$; 2) $\frac{100-49b^2}{7b+10}$; 3) $\frac{5y-y^2}{25-y^2}$; 4) $\frac{b^2-c^2}{b^4n-c^4n}$; 5) $\frac{5a^3b+5ab^3}{a^4-b^4}$.

443. 1) $\frac{d^2-6d+9}{d-3}$; 2) $\frac{b+7}{b^2+14b+49}$; 3) $\frac{9-6a+a^2}{3-a}$; 4) $\frac{1-2p}{1-4p+4p^2}$.

444. 1) $\frac{1-a^2}{(a-1)^2}$; 2) $\frac{(m-n)^2}{n-m}$; 3) $\frac{4y^2-4y+1}{2-4y}$; 4) $\frac{5-2x}{4x^2-20x+25}$.

445. 1) $\frac{4y^2-4y+1}{4y^2-1}$; 2) $\frac{16a^2-1}{16a^2-8a+1}$;

3) $\frac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6b^2}$; 4) $\frac{50m^2+100mn+50n^2}{15m^2-15n^2}$.

446. 1) $\frac{ax-ay+bx-by}{a+b}$; 2) $\frac{2a+2b+ax+bx}{2+x}$;

3) $\frac{2x^2-2xy-x+y}{4x^2-1}$; 4) $\frac{x^2-y^2}{3x-2x^2+3y-2xy}$.

447. Упростить:

1) $\frac{a^2b-ab^2}{a^2-ab}$; 2) $\frac{2a^2-4a}{4a-8}$; 3) $\frac{2x^3y+2xy^3}{x^2+y^2}$; 4) $\frac{x^4y^2-x^2y^4}{x^2(x+y)}$.

Упростить выражение и найти его числовое значение **(448—449).**

448. 1) $\frac{9c^2-16}{16-24c+9c^2}$ при $c=\frac{7}{9}$;

2) $\frac{4x^2-4xy+y^2}{y^2-4x^2}$ при $x=-0,2$, $y=0,1$.

449. 1) $\frac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}$ при $a=0,2$, $b=0,4$;

2) $\frac{3ac^2+3bc^2-3ab^2-3b^3}{6ac^2+6bc^2-6ab^2-6b^3}$ при $a=4,49$, $b=-5,1$, $c=0,68$.

450. Сократить дробь;

1) $\frac{|a|}{2a}$, если $a > 0$; 2) $\frac{3a}{|a|}$, если $a < 0$;

3) $\frac{-2a}{|a|}$, если $a < 0$; 4) $\frac{|a|}{-3a}$, если $a > 0$.

Диалог об истории

Алгебраические дроби в древности

Интересно, древние учёные знали алгебраические дроби?

Конечно, хотя именно так они их не называли. В знаменитой книге «Арифметика» Диофанта встречаются выражения, которые мы сегодня называем алгебраическими дробями. Более того, в его книге описывается, например, сложение дробей

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + x}{x^2 + 2x + 1} \text{ и } \frac{2x + 1}{x + 1}.$$

Так что алгебраическими дробями математики занимаются давно.

Впервые действия с алгебраическими выражениями (в том числе с алгебраическими дробями) описаны не риторически и не геометрически, а привычными нам буквенными символами в книге Исаака Ньютона «Всеобщая арифметика». Эта книга вышла в свет в 1707 г. и явилась продолжением и завершением трудов Виета, Декарта и других учёных в становлении современной алгебры. В книге Ньютона, например, приводится сокращение следующих дробей:

$$\frac{6a^3 - 9ac^2}{6a^2 + 3ac^3}; \quad \frac{a^3 - a^2b + ab^2 - b^3}{a^2 - ab}.$$

Ещё я хотел рассказать вам, что в своей книге Ньютон перечислял не только сходство обыкновенных и алгебраических дробей, но и их различия. В частности, он обращал внимание читателей на то, что целое число, записанное перед обыкновенной дробью, означает их сумму, например: $4\frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3}$. Число же, записанное перед алгебраической дробью, означает их произведение, например: $4\frac{a}{b} = 4 \cdot \frac{a}{b} = \frac{4a}{b}$.

§ 25 Приведение дробей к общему знаменателю

По аналогии с нахождением общего знаменателя обыкновенных дробей вы научитесь находить общий знаменатель алгебраических дробей. Это действие даёт возможность находить сумму и разность дробей с разными знаменателями.

Нужно вспомнить:

- основное свойство обыкновенной дроби;
- нахождение наименьшего общего кратного нескольких натуральных чисел;
- приведение обыкновенных дробей к общему знаменателю;
- свойства степеней;
- деление одночлена и многочлена на одночлен.

Напомним, что при сложении обыкновенных дробей сначала приводят дроби к общему знаменателю. Общим знаменателем дробей является наименьшее общее кратное их знаменателей.

Так, для дробей $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{25}$, $\frac{7}{10}$ общим знаменателем является число 100 — наименьшее общее кратное чисел 4, 25, 10.

Похожее преобразование приходится выполнять при сложении и вычитании алгебраических дробей, его также называют **приведением дробей к общему знаменателю.**

Задача 1. Привести алгебраические дроби $\frac{m}{3a^2b}$ и $\frac{n}{6ab^2}$ к общему знаменателю.

► Общий знаменатель данных дробей должен делиться на знаменатель каждой из дробей. Чтобы общий знаменатель делился на знаменатель первой дроби, он должен содержать множитель $3a^2b$. Далее, общий знаменатель должен делиться на знаменатель второй дроби $6ab^2$.

Таким образом, общий знаменатель должен делиться на 3 и 6, т. е. на 6, на a^2 и a, т. е. на a^2, на b и b^2, т. е. на b^2. Наиболее простым в данном случае общим знаменателем является одночлен $6a^2b^2$. Коэффициент этого одночлена равен наименьшему общему кратному коэффициентов знаменателей данных дробей, а каждая буква взята с наибольшим показателем из тех, с которыми она встречается в знаменателях.

Разделив $6a^2b^2$ на знаменатель первой дроби $3a^2b$, получим $2b$ — дополнительный множитель, на который нужно умножить её числитель и знаменатель. Дополнительный множитель второй дроби равен $6a^2b^2 : 6ab^2 = a$. Умножая числитель и знаменатель каждой дроби на её дополнительный множитель, приводим их к общему знаменателю: $\frac{m}{3a^2b} = \frac{2bm}{6a^2b^2}$, $\frac{n}{6ab^2} = \frac{an}{6a^2b^2}$. ◁

Задача 2. Привести к общему знаменателю дроби

$$\frac{a}{x^2 - y^2}, \quad \frac{b}{2x^2 - 4xy + 2y^2}, \quad \frac{c}{3x^2 + 6xy + 3y^2}.$$

▶ Разложим на множители знаменатели дробей:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y);$$
$$2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2(x^2 - 2xy + y^2) = 2(x - y)^2;$$
$$3x^2 + 6xy + 3y^2 = 3(x^2 + 2xy + y^2) = 3(x + y)^2.$$

Общий знаменатель должен делиться на знаменатель каждой из данных дробей. Так как он должен делиться на знаменатель первой дроби, то он должен содержать произведение $(x-y)(x+y)$. Далее, общий знаменатель должен делиться на знаменатель второй дроби, и поэтому он должен содержать множитель $2(x-y)^2$. Следовательно, к знаменателю первой дроби нужно дописать множитель $2(x-y)$, т. е. общий знаменатель должен содержать произведение $2(x-y)^2(x+y)$.
Для того чтобы общий знаменатель делился на знаменатель третьей дроби $3(x+y)^2$, нужно к полученному произведению дописать множитель $3(x+y)$. Следовательно, выражение $6(x-y)^2 \times$ $\times (x+y)^2$ является общим знаменателем трёх дробей.
Для приведения дробей к общему знаменателю нужно их числители и знаменатели умножить на дополнительные множители, которые находятся делением общего знаменателя на знаменатель каждой из дробей; для данных дробей они соответственно равны $6(x-y)(x+y)$, $3(x+y)^2$, $2(x-y)^2$. Следовательно, данные дроби можно записать так:

$$\frac{a}{x^2 - y^2} = \frac{6a(x-y)(x+y)}{6(x-y)^2(x+y)^2}; \quad \frac{b}{2x^2 - 4xy + 2y^2} = \frac{3b(x+y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2};$$
$$\frac{c}{3x^2 + 6xy + 3y^2} = \frac{2c(x-y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2}. \quad ◁$$

Таким образом, для приведения алгебраических дробей к общему знаменателю нужно:

1) найти общий знаменатель данных дробей;
2) для каждой дроби найти дополнительный множитель;

3) умножить числитель каждой дроби на её дополнительный множитель;

4) записать каждую дробь с найденным числителем и общим знаменателем.

Если в задании не указано, к какому общему знаменателю нужно привести дроби, то их приводят к простейшему общему знаменателю.

Устные вопросы и задания

1. На основании какого свойства алгебраические дроби приводят к общему знаменателю?

2. Сформулировать алгоритм приведения алгебраических дробей к общему знаменателю.

Вводные упражнения

1. Найти наименьшее общее кратное чисел:

1) 5, 15 и 25; 2) 16, 24 и 32; 3) 72 и 60; 4) 108 и 162.

2. Выполнить действия:

1) $\frac{2}{7}-\frac{3}{11}$; 2) $3\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}$; 3) $\frac{5}{12}+\frac{17}{18}$; 4) $\frac{7}{15}-\frac{4}{25}$.

3. Найти частное: 1) $30a^2b^3c:(5ab^2)$; 2) $48x^5y^6:(-16x^3y^3)$.

Упражнения

Привести дроби к общему знаменателю **(451—456)**.

451. 1) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{14}$; 3) $\frac{1}{3a}$ и $\frac{2}{a}$; 4) $\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{2b}$.

452. 1) $\frac{a}{b}$ и $\frac{b^2}{a}$; 2) $\frac{3b}{4a}$ и $\frac{a^2}{2b}$;

3) $\frac{b}{a}$, $\frac{a^2}{2b}$ и $\frac{c}{2ab}$; 4) $\frac{b}{3a}$, $\frac{3c}{2b}$ и $\frac{c}{6ab}$.

453. 1) $\frac{1}{2p^2}$, $\frac{1}{6pk}$ и $\frac{1}{3k^2}$; 2) $\frac{1}{6b^2}$, $\frac{a^2+b^2}{9a^2b^2}$ и $\frac{3-a}{18ab^2}$;

3) $\frac{2a}{b^2}$, $\frac{4}{15a^2b}$ и $\frac{3}{20a^3b^4}$; 4) $\frac{7}{20x^4y}$, $\frac{31}{6xy^3}$ и $\frac{4}{3x^2y^4}$.

454. 1) $\frac{1}{x-y}$ и $\frac{1}{x+y}$; 2) $\frac{7a}{3x-y}$ и $\frac{6b}{3x+y}$;

3) $\frac{5}{2x-2}$ и $\frac{3}{4x-4}$; 4) $\frac{3x}{4x+4y}$ и $\frac{x}{8x+8y}$.

455. 1) $\frac{3b}{b-2}$ и $\frac{4}{b^2-4}$; 2) $\frac{7a}{x^2-9}$ и $\frac{a}{x+3}$;

3) $\frac{1}{1-a}$, $\frac{2a}{1+a}$ и $\frac{a^2}{1-a^2}$; 4) $\frac{6x}{x-y}$, $\frac{7xy}{x+y}$ и $\frac{3}{x^2-y^2}$.

456. 1) $\frac{m+n}{2m-2n}$ и $\frac{n^2+m^2}{m^2-n^2}$; 2) $\frac{a-b}{5a+5b}$ и $\frac{a^2+b}{a^2-b^2}$;

3) $\frac{7}{(x-y)^2}$ и $\frac{5}{x-y}$; 4) $\frac{5c}{(c-2)^2}$ и $\frac{6}{c-2}$.

457. Записать выражения в виде дробей с одинаковыми знаменателями:

1) a и $\frac{c}{b}$; 2) ab, $\frac{3c}{2b}$ и $\frac{a}{4b}$; 3) ab, $\frac{3}{4ab}$ и $\frac{2}{ab^2}$;

4) $3b$ и $\frac{7}{6a}$; 5) $a-b$, $\frac{1}{a+b}$ и $\frac{1}{a-b}$; 6) $a+b$, $\frac{3}{ab}$ и $\frac{1}{a-b}$.

458. Привести к общему знаменателю:

1) $\frac{1}{a^2-4b^2}$, $\frac{1}{3a^2+6ab}$ и $\frac{1}{2ab-a^2}$; 2) $\frac{5}{4x-4}$, $\frac{4x}{1-x^2}$ и $\frac{1}{3x^2+3x}$;

3) $\frac{5x}{x^2-4}$, $\frac{3x+y}{x^2+4x+4}$ и $\frac{y-x}{x^2-4x+4}$; 4) $\frac{3a}{2a-3}$, $\frac{4a}{2a+3}$ и $\frac{5b}{4a^2c-9c}$.

459. Решить уравнение:

1) $\frac{(2x+1)(x+3)}{75}-\frac{(4-x)(4+x)}{25}=\frac{x(x+2)}{15}$;

2) $\frac{x(x-1)}{7}-\frac{2(x^2+1)}{28}=\frac{(x-1)(x+2)}{14}$;

3) $\frac{(2-x)(2+x)}{3}-\frac{x-x^2}{4}=\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{7x^2}{36}$;

4) $\frac{(x-2)^2}{5}+\frac{2x^2-3}{15}=\frac{(x-1)(x+1)}{3}$.

460. Привести дроби к общему знаменателю:

1) $\frac{5a}{a^3-27}$, $\frac{a-3}{a^2+3a+9}$ и $\frac{1}{a-3}$; 2) $\frac{3}{x+2}$, $\frac{x+1}{x^3+8}$ и $\frac{x+2}{x^2-2x+4}$;

3) $\frac{2m}{(m-n)^3}$, $\frac{2n}{(m-n)^2}$ и $\frac{1}{m^2-n^2}$;

4) $\frac{1}{k^3+3k^2+3k+1}$, $\frac{2}{k^2-1}$ и $\frac{3}{k^2+2k+1}$.

461. Пусть n — натуральное число. Найти общий знаменатель дробей:

1) $\frac{1}{x^{4n}-y^{4n}}$, $\frac{1}{x^{2n}-y^{2n}}$ и $\frac{1}{x^n-y^n}$; 2) $\frac{1}{a^{2n}-b^{2n}}$, $\frac{1}{a^n-b^n}$ и $\frac{1}{a^n+b^n}$.

Это интересно

Как вы думаете, ребята, сложным ли выражением будет общий знаменатель таких дробей:

$$\frac{1}{1+a^{16}},\ \frac{1}{1+a^{8}},\ \frac{1}{1+a^{4}},\ \frac{1}{1+a^{2}},\ \frac{1}{1+a}\ \text{и}\ \frac{1}{1-a}?$$

Он будет очень длинным. Так как выражения $1+a^{16}$ и $1+a^{8}$ не имеют общих делителей, то в общий знаменатель войдёт их произведение... Придётся перемножить знаменатели всех шести дробей — получим их общий знаменатель.

Думаю, что ты не права, Света. Я пробежал глазами строчку с данными дробями не только слева направо, но и справа налево, рассматривая при этом знаменатели дробей. И ты, рассмотрев знаменатели двух последних дробей, увидела бы, что $(1-a)(1+a)=1-a^2$, затем, $(1+a^2)(1-a^2)=1-a^4$ и т. д. Таким образом произведение шести множителей превращается в красивый двучлен $1-a^{32}$.

§ 26 Сложение и вычитание алгебраических дробей

При изучении этого параграфа умение приводить алгебраические дроби к общему знаменателю будет применено к действиям сложения и вычитания дробей.

Нужно вспомнить:

- основное свойство дроби;
- свойства степеней;
- приведение дробей к общему знаменателю;
- сокращение дробей;
- способы разложения многочлена на множители;
- деление многочлена и одночлена на одночлен.

Сложение и вычитание алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями выполняются по тем же правилам, что и сложение и вычитание обыкновенных дробей:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m},\quad \frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}.$$

Задача 1. Сложить дроби $\frac{a-b}{a+b}$, $\frac{2a-b}{a+b}$ и $\frac{a-2b}{a+b}$.

► $\frac{a-b}{a+b}+\frac{2a-b}{a+b}+\frac{a-2b}{a+b}=\frac{a-b+2a-b+a-2b}{a+b}=\frac{4a-4b}{a+b}=\frac{4(a-b)}{a+b}$. ◁

Задача 2. Найти разность дробей $\frac{a^2}{a+b}$ и $\frac{b^2}{a+b}$.

► $\frac{a^2}{a+b}-\frac{b^2}{a+b}=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}=a-b$. ◁

Для сложения и вычитания алгебраических дробей с разными знаменателями нужно привести эти дроби к общему знаменателю и воспользоваться правилом сложения или вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Задача 3. Сложить дроби $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{2a^2b}$ и $\frac{1}{3ab^2}$.

► Общим знаменателем данных дробей является произведение $6a^3b^2$. Следовательно,

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{2a^2b}+\frac{1}{3ab^2}=\frac{6b^2}{6a^3b^2}+\frac{3ab}{6a^3b^2}+\frac{2a^2}{6a^3b^2}=\frac{2a^2+3ab+6b^2}{6a^3b^2}.$$ ◁

Задача 4. Найти разность дробей $\frac{a}{3b^2c}$ и $\frac{c}{15ab^2}$.

► $\frac{a}{3b^2c}-\frac{c}{15ab^2}=\frac{5a^2}{15ab^2c}-\frac{c^2}{15ab^2c}=\frac{5a^2-c^2}{15ab^2c}$. ◁

Задача 5. Сложить дроби $\frac{1}{x^2-x}$ и $\frac{3}{x^2-1}$.

► Разложим многочлены, стоящие в знаменателях дробей, на множители:

$$x^2-x=x(x-1),\quad x^2-1=(x-1)(x+1).$$

Общим знаменателем данных дробей является произведение $x(x-1)(x+1)$. Приведя дроби к общему знаменателю, найдём:

$$\frac{1}{x^2-x}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{3}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{x+1}{x(x^2-1)}+\frac{3x}{x(x^2-1)}=\frac{x+1+3x}{x(x^2-1)}=\frac{4x+1}{x(x^2-1)}.$$ ◁

Таким образом, для сложения (или вычитания) алгебраических дробей с разными знаменателями нужно:
1) найти общий знаменатель дробей;
2) привести дроби к общему знаменателю;
3) сложить (или вычесть) полученные дроби;
4) упростить результат, если возможно.

Задача 6. Вычислить значение выражения

$$\frac{1}{a^2+4a+4}-\frac{4}{a^4+4a^3+4a^2}+\frac{4}{a^3+2a^2} \text{ при } a=0{,}5.$$

▶ Данное выражение можно преобразовать так:

$$\frac{1}{(a+2)^2}-\frac{4}{a^2(a^2+4a+4)}+\frac{4}{a^2(a+2)}=$$

$$=\frac{1}{(a+2)^2}-\frac{4}{a^2(a+2)^2}+\frac{4}{a^2(a+2)}=\frac{a^2-4+4(a+2)}{a^2(a+2)^2}=\frac{a^2+4a+4}{a^2(a+2)^2}=\frac{1}{a^2}.$$

Следовательно, искомое значение равно $\frac{1}{0{,}5^2}=\frac{1}{0{,}25}=\frac{100}{25}=4.$ ◁

Устные вопросы и задания

1. Как складываются алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями?
2. Сформулировать алгоритм сложения (вычитания) алгебраических дробей с разными знаменателями.
3. Как можно упростить результат действий с алгебраическими дробями?

Вводные упражнения

1. Вычислить:

1) $\frac{3}{19}+\frac{7}{19}$; 2) $\frac{5}{11}-\frac{7}{9}$; 3) $1\frac{2}{3}+2\frac{3}{5}$; 4) $\frac{3}{40}+\frac{1}{10}$; 5) $\frac{7}{24}-\frac{5}{36}$.

2. Выполнить действия:

1) $21x^5y^6\cdot 2y^3$; 2) $3a^4b^5\cdot 6a^2b$; 3) $(4a^6-b)\cdot ab$;
4) $2xy^3(x+y)$; 5) $27a^3b^8:(3ab^2)$; 6) $(a-3b)(3b+a)$.

3. Привести к общему знаменателю дроби:

1) $\frac{1}{6x^2}$ и $\frac{1}{4x}$; 2) $\frac{1}{3x^2y}$, $\frac{1}{12xy^2}$ и $\frac{1}{18x^2y^3}$;
3) $\frac{1}{(x+y)^2}$ и $\frac{1}{(x+y)^3}$; 4) $\frac{1}{a-b}$ и $\frac{1}{b-a}$; 5) $\frac{1}{4x^2-1}$ и $\frac{1}{1+2x}$.

Упражнения

Выполнить действия **(462—473)**.

462. 1) $\frac{c+d}{2a}+\frac{2c-d}{2a}$; 2) $\frac{a+d}{2c}-\frac{a-b}{2c}$; 3) $\frac{10a-b}{a^3}-\frac{3a-b}{a^3}$.

463. 1) $\frac{2}{3a}+\frac{1}{a}$; 2) $\frac{1}{b}-\frac{2}{5b}$; 3) $\frac{c}{15a}+\frac{d}{3}$; 4) $\frac{a}{4}-\frac{b}{12d}$.

464. 1) $5-\frac{2}{b}+\frac{3}{b^2}$; 2) $\frac{2}{c}+4-\frac{3}{c^2}$; 3) $d-\frac{c}{d}+\frac{c^2}{d^2}$; 4) $\frac{m}{n}-k+\frac{m^2}{n^2}$.

465. 1) $\frac{3c}{4a^3b}+\frac{5d}{6ab^3}$; 2) $\frac{2}{3y^3}-\frac{1}{6x^2y}+\frac{5}{12xy^2}$; 3) $\frac{b}{c}+\frac{b}{c^2d}+\frac{b}{cd^2}$.

466. 1) $\frac{7x}{2(x-1)}-\frac{5x}{x-1}$; 2) $\frac{2a^2}{3(a+1)}+\frac{5a^2}{4(a+1)}$; 3) $\frac{4y}{5(y-3)}-\frac{5x}{2(y-3)}$.

467. 1) $\frac{3}{a^2+a}+\frac{5a}{ab+b}$; 2) $\frac{y+a}{b^2+ba}+\frac{y-b}{ab+a^2}$; 3) $\frac{y-b}{a^2-ab}-\frac{y-a}{ab-b^2}$.

468. 1) $\frac{2}{x^2-9}+\frac{1}{x+3}$; 2) $\frac{5+p^2}{p^2-36}-\frac{p}{6+p}$; 3) $\frac{2x}{x-4}-\frac{5x-2}{x^2-16}$.

469. 1) $\frac{y}{n-2}+\frac{z}{2-n}$; 2) $\frac{2m}{3-5n}-1+\frac{7n-4}{5n-3}$; 3) $4-\frac{3a}{5-2b}+\frac{5(a-10)}{2b-5}$.

470. 1) $\frac{12n-5}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}$; 2) $\frac{c^2-8}{2c+3}-\frac{16c-2c^3}{9-4c^2}$; 3) $\frac{21y^2+1}{1-9y^2}-\frac{y}{3y-1}$.

471. 1) $\frac{3}{a+2}+\frac{2a}{(a+2)^2}$; 2) $\frac{7}{(a-b)^2}-\frac{5}{b-a}$; 3) $\frac{4}{(m-n)^2}-\frac{7}{n-m}$.

472. 1) $a+\frac{a}{a-1}$; 2) $b-\frac{b}{b-2}$; 3) $c+1-\frac{c^2}{c-1}$; 4) $\frac{a^2}{a+1}-a+1$.

473. 1) $\frac{7a-1}{2a^2+6a}+\frac{5-3a}{a^2-9}$; 2) $\frac{6}{3x+3y}+\frac{8x}{4x^2-4y^2}$; 3) $\frac{3a-b}{a^2-b^2}-\frac{a}{a^2-ab}$;

4) $\frac{3a}{4a^2-1}-\frac{a+1}{2a^2+a}$; 5) $\frac{b-1}{(b+3)^2}-\frac{b}{b^2-9}$; 6) $\frac{a-3}{a^2-4}-\frac{a}{(a-2)^2}$.

474. Найти значение выражения:

1) $\frac{7}{a+b}+\frac{8}{a-b}-\frac{16b}{a^2-b^2}$ при $a=0{,}05$, $b=-0{,}04$;

2) $\frac{3}{a+3}-\frac{2}{3-a}-\frac{12}{a^2-9}$ при $a=-8$;

3) $\frac{6x}{x^2-y^2}-\frac{3}{x-y}-\frac{4}{x+y}$ при $x=\frac{3}{7}$, $y=-\frac{1}{21}$;

4) $\frac{18}{9-4a^2}-\frac{4}{2a+3}+\frac{3}{2a-3}$ при $a=-0{,}6$.

475. Упростить:

1) $\frac{2y+8}{y^2-4y+4}-\frac{7}{y-2}$; 2) $\frac{4+6x}{1+6x+9x^2}-\frac{2}{3x+1}$;

3) $\frac{2}{25-10a+a^2}-\frac{10}{a^2-25}$; 4) $\frac{1}{x^2-6x+9}+\frac{1}{(x+3)^2}$.

476. Решить уравнение:

1) $\frac{4x-3}{2}-\frac{5-2x}{3}-\frac{3x-4}{3}=5$; 2) $2x+\frac{3x-1}{2}-\frac{5x-2}{3}=2$;

3) $\frac{8x+7}{6}-\frac{5x-2}{2}=3-\frac{3-2x}{4}$; 4) $\frac{4z}{3}-17+\frac{3z-17}{4}=\frac{z+5}{2}$.

477. Найти разность дробей:

1) $\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}$; 2) $\frac{a^2+4}{a^3+8}-\frac{1}{a+2}$;

3) $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}-\frac{1}{a+b}$; 4) $\frac{m^2-3m+9}{m^3-27}-\frac{1}{m-3}$.

478. Найти значение выражения:

1) $\frac{8a^2}{a^3-1}+\frac{a+1}{a^2+a+1}$ при $a=2$;

2) $\frac{3c^2-c+8}{c^3-1}-\frac{c-1}{c^2+c+1}+\frac{2}{1-c}$ при $c=1\frac{1}{2}$.

479. Упростить выражение, если n — натуральное число:

1) $\frac{1}{a^{2n}-b^{2n}}+\frac{1}{a^n+b^n}-\frac{1}{a^n-b^n}$; 2) $\frac{a^n+b^n}{a^{2n}+2a^nb^n+b^{2n}}+\frac{1}{a^n+b^n}-\frac{1}{a^n}$.

Разговор о важном

Мне понравились советы Тёмы, которые он дал Светлане в прошлый раз: рассматривать и сопоставлять все элементы условия задачи. С их учётом предлагаю вам найти сумму следующих дробей:

$$\frac{1}{1+a^{16}}+\frac{1}{1+a^8}+\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1-a}.$$

Конечно, мы уже знаем общий знаменатель дробей, входящих в данное выражение, — это $1-a^{32}$. Но расставлять дополнительные множители, умножать на них числители и потом преобразовывать длинное выражение в числителе полученной дроби займёт очень много времени.

Всё гораздо проще. Посмотри, что получится, если мы перепишем сумму от конца к началу и будем последовательно выполнять сложение дробей.

Молодец, Тёма. Думаю, что ты почти устно сможешь найти предложенную сумму. Светлана, попробуй и ты найти её. Подскажу даже ответ: $\dfrac{32}{1-a^{32}}$.

Тёма, ты меня всё время критикуешь. Если уж ты такой умный, то попробуй найти сумму дробей:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}.$$

Да, сразу и не соображу. Хотя понимаю, что бессмысленно выполнять суммирование в порядке следования дробей и в обратном порядке. И с пользой группировать слагаемые не получается.

То-то же. Хотя я и подсмотрела в задачнике решение, но поняла всё сразу. Смотри, как красиво получается, если каждую дробь вида $\dfrac{1}{n(n+1)}$ заменить разностью $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$:

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right).$$

После раскрытия скобок все члены, кроме первого и последнего, взаимно уничтожаются и останется $1-\dfrac{1}{100}$, т. е. $\dfrac{99}{100}$.

Молодец. Чтобы лучше усвоить такую красивую идею, предлагаю использовать её при нахождении аналогичной суммы, справедливой для любого числа n слагаемых:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Затем попробуйте найти следующую сумму:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 101}.$$

§ 27 Умножение и деление алгебраических дробей

В этом параграфе знакомые вам действия умножения и деления обыкновенных дробей, а также возведение дроби в натуральную степень будут перенесены на действия с алгебраическими дробями.

Нужно вспомнить:

- умножение и деление обыкновенных дробей;
- понятие степени числа;
- свойства степеней;
- сокращение дробей;
- запись одночленов и многочленов в стандартном виде;
- основное свойство пропорции.

Умножение и деление алгебраических дробей выполняются по тем же правилам, что и умножение и деление обыкновенных дробей:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Задача 1. Найти произведение дробей $\frac{1}{2xy}$, $\frac{4x^2y^3}{5z}$ и $\frac{10z^2}{3x^3}$.

► $\frac{1}{2xy}\cdot\frac{4x^2y^3}{5z}\cdot\frac{10z^2}{3x^3}=\frac{1\cdot 4x^2y^3\cdot 10z^2}{2xy\cdot 5z\cdot 3x^3}=\frac{4y^2z}{3x^2}$. ◁

Задача 2. Умножить дроби $\frac{a-b}{a^2+ab}$ и $\frac{b^2+ab}{(a-b)^2}$.

► $\frac{a-b}{a^2+ab}\cdot\frac{b^2+ab}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)b(a+b)}{a(a+b)(a-b)^2}=\frac{b}{a(a-b)}$. ◁

Задача 3. Найти частное дробей $\frac{m+n}{9m^2n^3}$ и $\frac{m^2-n^2}{27mn^2}$.

► $\frac{m+n}{9m^2n^3}:\frac{m^2-n^2}{27mn^2}=\frac{(m+n)\cdot 27mn^2}{9m^2n^3(m^2-n^2)}=\frac{(m+n)\cdot 3}{mn(m-n)(m+n)}=\frac{3}{mn(m-n)}$. ◁

При возведении алгебраической дроби в степень используется формула

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Например: $\left(\frac{4a^2}{b}\right)^2=\frac{16a^4}{b^2}$, $\left(\frac{a+b}{3c}\right)^3=\frac{(a+b)^3}{27c^3}$.

Устные вопросы и задания

1. Сформулировать правила умножения и деления алгебраических дробей.
2. Как возвести алгебраическую дробь в степень?
3. Что такое допустимые значения букв, входящих в алгебраическое выражение?
4. Каковы допустимые значения букв, входящих в алгебраическую дробь?

Вводные упражнения

Найти значение выражения:

1) $\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{5}$; 2) $\frac{24}{25}\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)$; 3) $\frac{14}{99}:\frac{63}{110}$; 4) $8\cdot\frac{1}{4}$; 5) $\frac{5}{7}\cdot 35$;

6) $42:\frac{6}{7}$; 7) $\frac{3}{8}:24$; 8) $\left(-1\frac{3}{5}\right)^2$; 9) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$; 10) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$.

Упражнения

Выполнить умножение **(480—481)**.

480. 1) $\frac{85}{24}\cdot\frac{72}{17}$; 2) $\frac{256}{169}\cdot\frac{13}{64}$; 3) $50\cdot\frac{7}{625}$; 4) $\frac{5}{26}\cdot 39$.

481. 1) $\frac{a^3b}{c}\cdot\frac{c^2}{a^4}$; 2) $\frac{m^2n^2}{k}\cdot\frac{k^3}{m^3n^3}$; 3) $\frac{2a}{3b}\cdot 6c$; 4) $14a^2\cdot\frac{b^2}{7c^3}$.

482. Выполнить деление дробей:

1) $\frac{a}{b}:\frac{a}{b}$; 2) $\frac{3a}{7b}:\frac{m}{n}$; 3) $\frac{c}{2d}:\frac{3a}{5b}$; 4) $\frac{2a}{3b}:\frac{a^2}{bc}$; 5) $\frac{5m}{n^2}:\frac{10m^3}{n}$.

483. Выполнить деление:

1) $\frac{4}{13}:5$; 2) $\frac{a}{b}:c$; 3) $12:\frac{8}{9}$; 4) $a:\frac{b}{c}$.

Выполнить действия **(484—487)**.

484. 1) $\left(\frac{5a}{7b}\right)^2\cdot\frac{14b^2}{25a^3}$; 2) $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^3\cdot\frac{16b^3}{21a^4}$; 3) $\left(\frac{ab}{cd}\right)^2\cdot acd$; 4) $abc^2\cdot\left(\frac{ab}{cd}\right)^2$.

485. 1) $\frac{8a^2b}{9c}\cdot\frac{36c^3}{5a^3b}$; 2) $\frac{7b^4}{9c^5y}:\frac{35b^4c}{18c^4y^2}$; 3) $\frac{16x^2y}{7z}:\frac{10xy^3}{21z^2}$;

4) $\frac{46d^3c}{15a}:\frac{23dc^2}{5a^3}$; 5) $\frac{18m^3n^5}{7k}:(9n^2)$; 6) $24k^2:\frac{12m^4k^2}{11p^3n}$.

486. 1) $\frac{7-x}{a+b}\cdot\frac{a-b}{7-x}$; 2) $\frac{x-y}{2a}\cdot\frac{4b}{x-y}$; 3) $\frac{c+d}{c-d}:\frac{c}{c-d}$;

4) $\frac{a-b}{2b}:\frac{a-b}{6b^2}$; 5) $\frac{a^2-ab}{b}\cdot\frac{b^2}{a}$; 6) $\frac{ab+b^2}{9}:\frac{b^2}{3a}$.

487. 1) $\frac{1-a}{3b^2}\cdot\frac{b^3}{1-a^2}$; 2) $\frac{5m}{m^2-n^2}:\frac{15m^3}{m-n}$;

3) $\frac{3(x+y)}{4y^2(x^2+y^2)}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; 4) $\frac{5(a-b)}{3(a^2+b^2)}:\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$.

488. Найти значение выражения:

1) $\frac{a^2-b^2}{3a+3b}\cdot\frac{3a^2}{5b-5a}$ при $a=2{,}5$; 2) $\frac{a^2-25}{a^2-3a}:\frac{a+5}{9-a^2}$ при $a=1$;

3) $\frac{5x^2-5y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{3x^2+3y^2}{10y-10x}$ при $x=\frac{5}{6}$, $y=\frac{2}{3}$;

4) $\frac{3n^2-3m^2}{n^2+np}:\frac{6m-6n}{n+p}$ при $m=-9$, $n=-3$.

489. Проверить, верно ли равенство:

1) $\frac{a^2+b^2}{x^3+x^2y}\cdot\frac{x^2-y^2}{a^4-b^4}=\frac{x-y}{x(a^2-b^2)}$; 2) $\frac{a^2+b^2}{a^2-ab}:\frac{a^4b-b^5}{a^2b-ab^2}=\frac{1}{a^2-b^2}$.

490. Упростить:

1) $\frac{a-5}{a^2+6a+9}\cdot\frac{(a+3)^2}{a^2-25}$; 2) $\frac{b^2-8b+16}{b+3}:\frac{(b-4)^2}{b^2-9}$;

3) $\frac{a^2-49}{a^2+2ab+b^2}\cdot\frac{a+b}{a-7}$; 4) $\frac{a^2-2a+1}{2a+1}:\frac{a-1}{4a^2-1}$.

491. Решить уравнение:

1) $\frac{3(x-11)}{4}=\frac{3(x+1)}{5}-\frac{2(2x-5)}{11}$;

2) $\frac{2(5x+2)}{9}-1=\frac{4(33+2x)}{5}-\frac{5(1-11x)}{9}$;

3) $\frac{8(x+10)}{15}-24\frac{1}{2}=\frac{7x}{10}-\frac{2(11x-5)}{5}$;

4) $\frac{2(x-4)}{3}+\frac{3x+13}{8}=\frac{3(2x-3)}{5}-7$.

492. Решить уравнение относительно x, если $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq b$, $a\neq -b$:

1) $\frac{a+b}{x}=\frac{a^2-b^2}{a}$; 2) $\frac{x}{a^2-b^2}=\frac{ab}{a^2-ab}$;

3) $\frac{a^2-2ab+b^2}{b}=\frac{a^2-b^2}{x}$; 4) $\frac{ab^2-b^3}{a^3b-ab^3}=\frac{x}{a^2+2ab+b^2}$.

493. Упростить:

1) $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab+b^2}:\dfrac{8a-8b}{a^3+b^3}$; 2) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\cdot\dfrac{a^3-b^3}{7a+7b}$;

3) $\dfrac{n^3-m^3}{n^2-m^2}:\dfrac{n^2+nm+m^2}{n^2+2mn+m^2}$; 4) $\dfrac{m^2+2mn+n^2}{p^3+c^3}\cdot\dfrac{p+c}{2m+2n}$;

5) $\dfrac{a^2-ab+b^2}{b^2-a^2}:\dfrac{a^3+b^3}{a+b}:\dfrac{a+b}{a-b}$; 6) $\dfrac{x^3-27}{9+6x+x^2}:\dfrac{3-x}{3+x}:\dfrac{2x^2+6x+18}{x+3}$.

494. Доказать, что при всех допустимых значениях a, b, x и y (n — натуральное число) верно равенство:

1) $\dfrac{a^{2n}-b^{2n}}{a^{2n}+b^{2n}}\cdot\dfrac{a^{4n}-b^{4n}}{a^{2n}-2a^nb^n+b^{2n}}=(a^n+b^n)^2$;

2) $\dfrac{(x^n+y^n)^2}{x^{4n}-y^{4n}}:\dfrac{x^{2n}-y^{2n}}{x^{2n}+y^{2n}}=\dfrac{1}{(x^n-y^n)^2}$.

Шаг вперёд

Так как вы познакомились со всеми действиями, которые можно выполнять с алгебраическими дробями, попробуйте преобразовать такое необычное выражение:

$$\frac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}:\frac{a^2b^2}{(a+b)^2+(a-b)^2}.$$

Профессор, с этим преобразованием мы справимся, невзирая на 4 этажа дробей. Нужно лишь не ошибиться в порядке действий. Но я хотел к Вам обратиться за помощью: Светлана опять дала мне из своего задачника сложную задачу, к которой пока не знаю, как подступиться. Нужно найти произведение

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100^2}\right).$$

В решении этой задачи никаких особо оригинальных приёмов применять не нужно. Начни выписывать аккуратно все множители после действий в скобках и посмотри, как упрощается получаемая после умножения дробь. А ответ к задаче такой: $\dfrac{101}{200}$.

§ 28 Совместные действия над алгебраическими дробями

При совместных действиях над алгебраическими дробями вам придётся применять все ранее полученные знания и умения: правильно определять порядок выполнения действий; при сложении и вычитании дробей — приводить их к общему знаменателю; после умножения и деления дробей — выполнять при необходимости сокращение получаемых дробей. Преобразовывая дроби, вы будете выполнять действия с одночленами и многочленами.

Нужно вспомнить:

- порядок выполнения арифметических действий;
- сложение, вычитание, умножение и деление алгебраических дробей;
- возведение алгебраической дроби в степень;
- нахождение числового значения алгебраического выражения.

Задача 1. Упростить выражение $\left(\frac{a+1}{2a-2}-\frac{1}{2a^2-2}\right)\cdot\frac{2a+2}{a+2}$.

▶ Выполним вычитание в скобках:

$$\frac{a+1}{2a-2}-\frac{1}{2a^2-2}=\frac{a+1}{2(a-1)}-\frac{1}{2(a^2-1)}=$$

$$=\frac{(a+1)^2-1}{2(a^2-1)}=\frac{(a+1-1)(a+1+1)}{2(a^2-1)}=\frac{a(a+2)}{2(a+1)(a-1)}.$$

Найдём произведение:

$$\frac{a(a+2)}{2(a+1)(a-1)}\cdot\frac{2a+2}{a+2}=\frac{a(a+2)\cdot 2(a+1)}{2(a+1)(a-1)(a+2)}=\frac{a}{a-1}. \triangleleft$$

Решение задачи 1 можно записать иначе:

▶ $$\left(\frac{a+1}{2a-2}-\frac{1}{2a^2-2}\right)\cdot\frac{2a+2}{a+2}=\left(\frac{a+1}{2(a-1)}-\frac{1}{2(a^2-1)}\right)\cdot\frac{2(a+1)}{a+2}=$$

$$=\frac{((a+1)^2-1)\cdot 2(a+1)}{2(a^2-1)(a+2)}=\frac{a(a+2)}{(a-1)(a+2)}=\frac{a}{a-1}. \triangleleft$$

Задача 2. Выполнить действия $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right)$.

▶ Выполним действие в первой скобке: $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=$

$$=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)(a+b)}=\frac{(a+b+a-b)(a+b-a+b)}{a^2-b^2}=\frac{2a\cdot 2b}{a^2-b^2}=\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

Выполним действие во второй скобке: $\frac{a+b}{a-b}-1=\frac{a+b-a+b}{a-b}=\frac{2b}{a-b}.$

Выполним деление: $\frac{4ab}{a^2-b^2}:\frac{2b}{a-b}=\frac{4ab(a-b)}{(a^2-b^2)\cdot 2b}=\frac{2a}{a+b}.$ ◁

Задача 3. Упростить выражение $\frac{2a}{a+1}-\frac{1}{a+1}\cdot\frac{(a+1)^2-1}{a+2}.$

▶ $\frac{2a}{a+1}-\frac{1}{a+1}\cdot\frac{(a+1)^2-1}{a+2}=\frac{2a}{a+1}-\frac{1}{a+1}\cdot\frac{a(a+2)}{a+2}=\frac{2a}{a+1}-\frac{a}{a+1}=\frac{a}{a+1}.$ ◁

Устные вопросы и задания

1. Назвать порядок выполнения арифметических действий.
2. Сформулировать правило:
   1) сложения (вычитания) дробей с разными знаменателями;
   2) умножения и деления дробей;
   3) возведения дроби в степень.
3. Что нужно сделать, чтобы найти числовое значение алгебраической дроби при заданных значениях входящих в неё букв?

Вводные упражнения

1. Выполнить действия:
   1) $7^2-23+16:2^3$; 2) $4^3+2\cdot 3^2-15$; 3) $13+2\cdot 5^2-(5+48:2^3)$.
2. Разложить на множители:
   1) $15x^8y^3-20x^7y^5$; 2) $-36a^5bc^2+48b^2c^3$; 3) $81x^2y^2-36z^2$;
   4) $100a^4-64b^6$; 5) $27x^6+8y^9$; 6) $8a^{12}-125b^3$;
   7) m^4-125m; 8) $27n^4+n$; 9) $4x^2-32xy+64y^2$.
3. Выполнить умножение:
   1) $13a^3b^7\cdot 2ab^2$; 2) $25x^6y\cdot 3xy^5$; 3) $(2x^6-y)(y+2x^6)$.

Упражнения

Выполнить действия **(495—501)**.

495. 1) $\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{3}\right)\cdot\frac{1}{a^2}$; 2) $\frac{a^2}{3}\cdot\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{a^2}\right)$; 3) $\frac{a-b}{a+b}\cdot\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{5}\right)$;

4) $\frac{ab}{a-b}\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$; 5) $1:\left(1-\frac{1}{a}\right)$; 6) $b:\left(b+\frac{1}{b}\right)$.

496. 1) $\left(1+\frac{1}{a}\right):\left(1-\frac{1}{a}\right)$; 2) $\left(a+\frac{a}{b}\right)\left(a-\frac{a}{b}\right)$.

497. 1) $\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(2+\frac{2b}{a-b}\right)$; 2) $\left(1+\frac{a+b}{a-b}\right)\left(2-\frac{2a}{a+b}\right)$.

498. 1) $\left(\frac{6}{a-b}-\frac{5}{a+b}\right)\cdot\frac{a-b}{a+11b}$; 2) $\left(\frac{3}{c}+\frac{3}{c+d}\right)\cdot\frac{c}{18(2c+d)}$;

3) $\frac{y-1}{y}:\left(\frac{y^2+1}{y^2+2y}-\frac{2}{y+2}\right)$; 4) $\frac{m-2}{m-5}:\left(\frac{m^2+24}{m^2-25}-\frac{4}{m-5}\right)$.

499. 1) $\frac{a^2+ab}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{a-b}-\frac{a}{a+b}\right)$; 2) $\frac{ab-b^2}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)$;

3) $\left(\frac{c+d}{c}-\frac{2c}{c-d}\right)\cdot\frac{d-c}{c^2+d^2}$; 4) $\left(\frac{2c}{c+d}+\frac{d-c}{c}\right)\cdot\frac{c+d}{c^2+d^2}$.

500. 1) $\frac{a^2+2a+1}{b^2-4}\cdot\frac{b+2}{a+1}-\frac{a}{b+2}$; 2) $\frac{a^2-2a+1}{b-2}:\frac{a^2-1}{b^2-4}-\frac{2a-b}{a+1}$;

3) $\frac{m-1}{m+1}-\frac{m(1-m^2)}{n}\cdot\frac{n}{(m+1)^2}$; 4) $\frac{2n+4}{2-n}-\frac{mn+n^2}{4-4n+n^2}:\frac{m+n}{4-n^2}$.

501. 1) $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right):\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)$; 2) $\left(\frac{2-a}{2+a}-\frac{a+2}{a-2}\right):\left(\frac{2+a}{2-a}+\frac{a-2}{a+2}\right)$;

3) $\left(\frac{m^2}{m-n}+\frac{m^2n}{m^2-2mn+n^2}\right):\left(\frac{2m^2}{m^2-n^2}-\frac{m}{m+n}\right)$.

502. Найти значение выражения:

1) $x^2-\frac{x^3-4xy^2}{x^3-2x^2y+xy^2}\cdot\frac{x^2-2xy+y^2}{x-2y}$ при $x=-5$, $y=-\frac{1}{2}$;

2) $\frac{3}{2}-\frac{3n^2-6n+3}{2n^2+2n+2}:\frac{n-1}{n^3+n^2+n}$ при $n=\frac{1}{3}$;

3) $\left(\frac{3}{a-b}-\frac{3a}{b^2-a^2}\right):\frac{6a+3b}{a^2+2ab+b^2}$ при $a=3\frac{1}{4}$, $b=-0{,}75$;

4) $\left(\frac{mn}{m^2-n^2}+\frac{n}{2n-2m}\right)\cdot\frac{m^2-n^2}{2n}$ при $m=6\frac{1}{2}$, $n=-1{,}5$.

503. Выполнить действия:

1) $\left(\frac{c-d}{c^2+dc}-\frac{c}{d^2+cd}\right):\left(\frac{d^2}{c^3-cd^2}+\frac{1}{c+d}\right)$;

2) $\left(\frac{2n}{k+2n}-\frac{4n^2}{k^2+4nk+4n^2}\right):\left(\frac{2n}{k^2-4n^2}+\frac{1}{2n-k}\right)$;

3) $\left(\frac{2q}{2q+m} - \frac{4q^2}{4q^2+4mq+m^2}\right) : \left(\frac{2q}{4q^2-m^2} + \frac{1}{m-2q}\right)$.

Разговор о важном

Прежде чем вы приступите к выполнению довольно сложного упражнения 504, рассмотрим задачу попроще. Докажем, что если $x + \frac{1}{x} = a$, то $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$.

Я не сказал бы, что эта задача выглядит проще. Хотя в квадрат возводить проще, чем в куб.

Да, нам понадобится возведение в квадрат двучлена. Если $x + \frac{1}{x} = a$, то $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = a^2$, откуда $x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = a^2$, или $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = a^2$. Думаю, что теперь легко выразить сумму $x^2 + \frac{1}{x^2}$. Она будет равна $a^2 - 2$. Теперь вы без особых затруднений выполните упражнение 504.

504. Доказать, что если $x + \frac{1}{x} = a$, то $x^3 + \frac{1}{x^3} = a(a^2 - 3)$.

505. Доказать, что если $-1 < x < 0$ или $0 < x < 1$, то значение выражения $\left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4x}\right)$ отрицательно.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ V

506. Решить уравнение:

1) $2x + \frac{6x-5}{7} = \frac{8x+7}{3}$;
2) $\frac{x+5}{24} - \frac{3x-8}{16} = 1$;
3) $2x + 1 + \frac{2x-1}{6} = \frac{7x-13}{4}$;
4) $\frac{3(2x-2{,}5)}{5} - 2x + 2{,}5 = \frac{2-x}{2}$.

507. Найти неизвестное число x из пропорции:

1) $\frac{a}{x} = \frac{2b}{3}$;
2) $\frac{4a}{3b} = \frac{2x}{a}$;
3) $\frac{x}{a+b} = \frac{a}{(a+b)^2}$;
4) $\frac{a+1}{a-1} = \frac{a^2-1}{ax}$.

508. Решить уравнение:

1) $\frac{(1-5x)^2}{48} - \frac{(2x-1)(2x+1)}{8} = \frac{x+0{,}25x^2}{12}$;
2) $\frac{0{,}03-x^2}{9} - \frac{(0{,}1+x)^2}{18} = \frac{(0{,}1-x)(0{,}1+x)}{6}$;
3) $\frac{(3x+4)^2}{36} + \frac{3x(1-x)}{18} = \frac{(x-4)(x+4)}{12}$.

509. Найти значение выражения:

1) $\frac{2x}{4x^2-y^2}-\frac{1}{2x+y}-\frac{y}{4x^2-y^2}$ при $x=0{,}37$, $y=-1{,}4$;

2) $\frac{x^2-1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1+x}+1\right)$ при $x=\frac{1}{2}$.

Выполнить действия **(510—512)**.

510. 1) $\frac{a+b}{a}-\frac{a}{a-b}-\frac{b^2}{a^2-ab}$; 2) $\frac{5b-1}{3b^2-3}+\frac{b+2}{2b+2}-\frac{b+1}{b-1}$;

3) $\frac{6a}{9a^2-1}+\frac{3a+1}{3-9a}+\frac{3a-1}{6a+2}$; 4) $\frac{7}{m}-\frac{4}{m-2n}-\frac{m-n}{4n^2-m^2}$;

5) $x-\frac{xy}{x+y}-\frac{x^3}{x^2-y^2}$; 6) $a-2+\frac{4a}{2+a}-\frac{a^3+b}{a^2+2a}$.

511. 1) $\frac{64x^2y^2-1}{x^2-4}\cdot\frac{(x+2)^2}{x^2-4}\cdot\frac{(x-2)^2}{8xy+1}$; 2) $\frac{ab-4b-2a+8}{2a+8-ab-4b}:\frac{2a-8-ab+4b}{ab+4b-2a-8}$;

3) $\frac{x-6}{x^2+6x+9}\cdot\frac{x^2+4x+4}{(x^2+2)(x-2)}\cdot\frac{x^3-9x}{(x-6)(x+2)}$;

4) $\frac{am^2-an^2}{m^2+2mn+n^2}:\frac{am^2-2amn+an^2}{3m+3n}$.

512. 1) $\left(\frac{a+1}{2a-2}+\frac{6}{2a^2-2}-\frac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\frac{4a^2-4}{3}$; 2) $\frac{a^2-c^2}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{ac+c^2}\cdot\left(a+\frac{ac}{a-c}\right)$;

3) $\left(\frac{b}{a^2+ab}+\frac{2}{a+b}+\frac{a}{b^2+ab}\right):\frac{a^2-b^2}{4ab}$; 4) $\frac{c^2-ac}{a^2-b^2}\cdot\frac{a-b}{c^2-a^2}:\left(c-\frac{ac}{a+c}\right)$.

513. Масса куска льда объёмом V м^3 равна p килограммам. Чему равна масса куска льда объёмом V_1 м^3?

514. Автомобиль, двигаясь со скоростью v километров в час, прошёл s километров. Какой путь пройдёт за то же время мотоцикл, если его скорость равна u километрам в час?

515. Собственная скорость моторной лодки v километров в час, а скорость течения реки v_1 километров в час. Двигаясь по течению, лодка прошла s километров. Какое расстояние пройдёт за это же время моторная лодка при движении против течения?

516. Бассейн наполняется одной трубой за a часов, другой — за b часов. За сколько часов наполнится бассейн, если одновременно открыть две трубы?

517. Два оператора, работая вместе, набирают рукопись за a часов. Один из них мог бы выполнить эту работу за b часов. За какое время мог бы набрать рукопись другой оператор?

518. Сопротивление R участка цепи, состоящего из двух параллельно соединённых проводников с сопротивлениями R_1 и R_2, находится из формулы $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. Выразить из этой формулы:

1) R через R_1 и R_2; 2) R_1 через R и R_2.

519. Давление p бензина на дно цистерны равно 69 580 Па (паскалей), плотность ρ бензина равна 710 кг/м³. С помощью микрокалькулятора найти высоту h цистерны с бензином (выраженную в м), если $p=g\rho h$, где $g=9{,}8$ м/с².

520. Сократить дробь:

1) $\frac{2ab-b}{8a^3-1}$; 2) $\frac{27a^3+b^3}{3ab+b^2}$; 3) $\frac{36c-c^3}{c^3+12c^2+36c}$;

4) $\frac{25b-49b^3}{49b^3-70b^2+25b}$; 5) $\frac{2a^4+3a^3+2a+3}{(a^2-a+1)(2a+3)}$.

521. Выполнить действия:

1) $\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}$; 2) $\frac{a^2+4}{a^3+8}-\frac{1}{a+2}$;

3) $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}-\frac{1}{a+b}$; 4) $\frac{m^2-3m+9}{m^3-27}-\frac{1}{m-3}$.

522. Доказать, что если

$a^3+b^3+c^3+abc=0,\ a+b\neq 0,\ b+c\neq 0$ и $c+a\neq 0$,

то $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Для получения 25%-ного раствора сахара к 6 л воды добавили x кг сахара (рис. 17). Найти x.

2. Сколько сахара нужно добавить к 8 л воды, чтобы получить 10%-ный раствор?

3. От дома до дачи велосипедист ехал со скоростью 12 км/ч. Обратно он возвращался со скоростью 8 км/ч. Найти среднюю скорость движения велосипедиста за время всей поездки, если расстояние от дома до дачи равно 6 км.

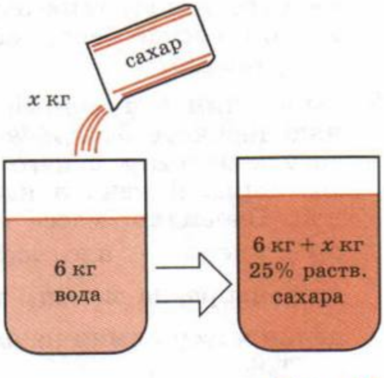
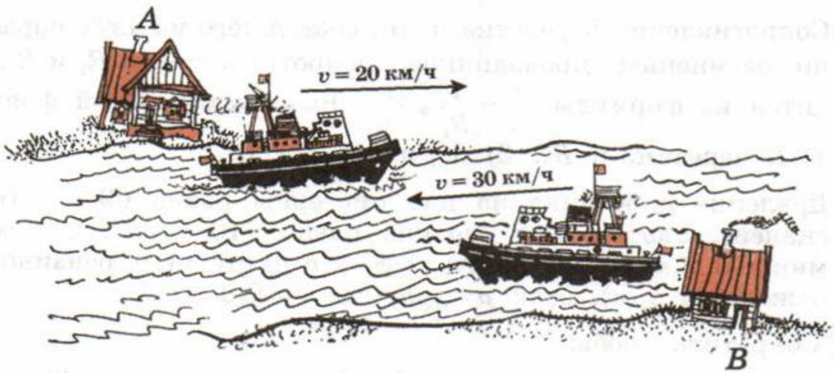


Рис. 17



4. Из пункта A в пункт B катер двигался со скоростью 20 км/ч, а на обратном пути из B в A — со скоростью 30 км/ч. Какова средняя скорость катера на пути из A в B и обратно?
5. Сопротивление R участка цепи, состоящего из трёх параллельно соединённых проводников с сопротивлениями R_1, R_2 и R_3, находится из формулы $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. Выразить из формулы: 1) R через R_1, R_2 и R_3; 2) R_3 через R, R_1 и R_2.
6. Расстояние s, которое проходит тело при равноускоренном движении с ускорением a за время t, имея начальную скорость v_0, находится по формуле $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Выразить из этой формулы v_0 и найти его значение, если $s = 150$ м, $a = 2$ м/с^2, $t = 10$ с.
7. Сила притяжения F между двумя телами с массами m и M, находящимися на расстоянии R, вычисляется по формуле $F = \gamma \frac{mM}{R^2}$, где γ — гравитационная постоянная. Выразить m.
8. Как с помощью чашечных весов, набора гирь и сосуда, наполненного водой, определить плотность камня $\rho_к$, умещающегося в этом сосуде, если объём камня невозможно измерить непосредственно?

► Определим с помощью весов отдельно массу камня $m_к$ и массу наполненного *до краёв* сосуда с водой m_1. После снятия с весов сосуда опустим в него камень (часть воды при этом выльется). Вытащим камень и измерим массу m_2 сосуда с оставшейся водой. Очевидно, масса вылившейся воды с одной стороны равна $\rho_в V_к$, где $\rho_в$ — плотность воды, $V_к$ — объём камня, а с другой стороны равна $m_1 - m_2$, т. е. $\rho_в V_к = m_1 - m_2$, откуда $V_к = \frac{m_1 - m_2}{\rho_в}$. Разделив массу камня на его объём, получим искомую плотность $\rho_к = \frac{m_к \rho_в}{m_1 - m_2}$. ◁

В этой главе вы узнали,

что такое:

— алгебраическая дробь;
— допустимые значения букв, входящих в алгебраическую дробь;
— основное свойство алгебраической дроби;
— общий знаменатель алгебраических дробей;

как:

— применять основное свойство дроби для упрощения результата действий с дробями;
— сокращать дроби;
— приводить дроби к общему знаменателю;
— выполнять действия сложения, вычитания, умножения и деления алгебраических дробей;
— возводить дробь в степень;
— выполнять совместные действия над алгебраическими дробями.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

1. Найти допустимые значения букв, входящих в дробь:

$$\frac{a}{b};\quad \frac{3}{a-1};\quad \frac{a}{b+2}.$$

2. Выполнить действия:

а) $4a+\frac{1-4a^2}{a}$; б) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$;

в) $\frac{2a-4}{3b}\cdot\frac{6b}{a-2}$; г) $\frac{a^2-b^2}{b^2}:\frac{a+b}{b}$.

3. Упростить выражение $\frac{1+2x}{x-3}-\frac{x^2+3x}{5}\cdot\frac{10}{x^2-9}$ и найти его числовое значение при $x=2\frac{2}{3}$.

II уровень

4. Найти допустимые значения букв, входящих в дробь:

$$\frac{a-4}{a+4};\quad \frac{2b}{b^2+1};\quad \frac{7}{c(c-2)}.$$

5. Сократить дробь $\frac{9x^2-4y^2}{20y^2-60xy+45x^2}$ и найти её значение при $x=\frac{2}{3}$, $y=0{,}75$.

II уровень

6. Доказать, что сумма дробей $\frac{2-a}{a+2}$, $\frac{2a}{2-a}$ и $\frac{4a^2}{a^2-4}$ равна 1.

7. Упростить выражение $\left(x+3+\frac{18}{x-3}\right)\cdot\frac{2x^2-12x+18}{x^2+9}$.

8. Решить уравнение $\frac{(x-3)^2}{12}-\frac{2x^2+5}{4}+\frac{1{,}25x^2-1}{3}=\frac{2}{3}$.

III уровень

9. Найти допустимые значения букв, входящих в дробь:
а) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$; б) $\frac{1-b}{|b|}$; в) $\frac{9}{a^2-9}$.

10. Сократить дробь: а) $\frac{5a}{|a|}$; б) $\frac{2|a-1|}{a-1}$.

11. Доказать, что значение выражения

$$\frac{x-3}{x^2-10x+25}-\frac{3-4x}{10x-25-x^2}+\frac{4x-5}{(5-x)^2}$$

не может быть равно 0 ни при каких допустимых значениях x.

12. Найти значение выражения

$$\frac{3m^{3n}}{m^{3n}+n^{3n}}\cdot\frac{m^n+n^n}{m^n}-\frac{3m^{2n}}{m^{2n}-m^nn^n+n^{2n}}.$$

13. Решить уравнение $\frac{(x+a)^2}{2}-\frac{(x-a)^2}{4}+\frac{x}{2}=\frac{a^2+x^2+3}{4}$.

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Понятия дроби и алгебраической дроби в книге И. Ньютона «Всеобщая арифметика».
2. Алгебраические дроби в книге Диофанта «Арифметика».
3. Действия с дробями в книге Л. Ф. Магницкого «Арифметика».
4. Дробные выражения в формулах естественных наук.
5. Цепные дроби.
6. Задачи на действия с алгебраическими дробями из сборников задач для математических кружков и математических олимпиад.
7. Изображение и описание дробей в произведениях искусства.

ГЛАВА VI

Линейная функция и её график

В природе всё находится в состоянии непрерывного изменения. У всех изменений есть свои причины, а каждая изменяющаяся величина меняется потому, что что-то тоже становится другим.

В практической деятельности людям постоянно приходится иметь дело с величинами, изменяющимися в зависимости от времени или каких-то других условий, т. е. приходится иметь дело с переменными величинами.

Понятие функции, с которым вам предстоит познакомиться в этой главе, появилось одновременно с понятием переменной величины. Термин *функция* (от лат. *function* — исполнение, совершение) впервые был введён Г. Лейбницем в конце XVII в., однако представление о функции было ещё у древних учёных. И было оно связано в основном с изменениями геометрических, физических и астрономических величин, с земельными расчётами, с ценами на товары и т. п. Например, из сохранившихся записей древнегреческого историка *Геродота (V в. до н. э.)* известно, что египетские цари после раздела земель между египтянами брали с них налоги, пропорциональные площади земельного участка, т. е. фактически размер налога P рассчитывался по формуле $P = k \cdot S$, где k — коэффициент пропорциональности, единый для всех землевладельцев, а S — площадь земельного участка. Тот, кто имел, например, участок в 2 раза больше, чем у соседа, и налог платил в 2 раза больше. Современные математики про такой налог могли бы сказать: «Налог P есть функция от площади участка S».

В неявном виде с функциями знакомы и вы. Например, в каждой классной комнате висит таблица зависимости квадрата числа от самого числа. Таблица — это один из способов задания функции. С этим, а также с другими способами задания функции (с помощью формулы, графика, описания) вы познакомитесь при изучении этой главы.

§ 29 Прямоугольная система координат на плоскости

Развитие торговли и мореплавания в XVII в., новые географические и астрономические открытия способствовали появлению математических идей и методов, решающих проблемы создания новых карт для определения местоположения новых земель и небесных светил. Гениальный французский учёный Рене Декарт с помощью созданного им метода координат помог естествоиспытателям в решении проблем изображения в любом месте плоскости различных объектов с учётом их местоположения.

В этом параграфе вы узнаете, как называются координаты точки на координатной плоскости, как строится точка по заданным координатам и как находится «адрес» точки, т. е. её координаты на плоскости.

Нужно вспомнить:

- построение взаимно перпендикулярных прямых;
- понятие числовой прямой (оси).

Две взаимно перпендикулярные прямые с выбранными направлениями и единицей длины образуют **прямоугольную систему координат** на плоскости.

Плоскость, на которой выбрана система координат, называют **координатной плоскостью.** Прямые углы, образуемые осями координат, называют **координатными углами (квадрантами)** и нумеруют так, как показано на рисунке 18, *а*.

Абсциссу и **ординату** точки M называют координатами точки M. Запись $M(x;\ y)$ означает, что точка M имеет абсциссу x и ординату y (рис. 18, *б*). Например, в записи $M(3;\ 5)$ число 3 — абсцисса, число 5 — ордината точки M.

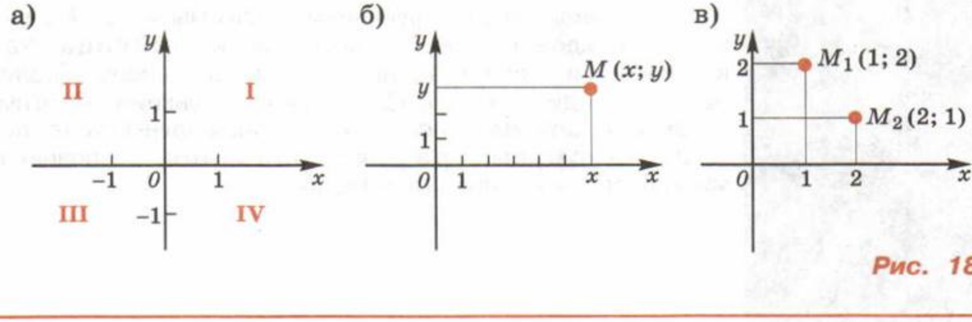


Рис. 18

В записи координат точек порядок чисел имеет существенное значение. Например, $M_1(1;\ 2)$ и $M_2(2;\ 1)$ — различные точки плоскости (рис. 18, *в*).

Если точка лежит на оси абсцисс, то её ордината равна нулю. Например, точка A (рис. 19, *а*) имеет координаты $(2;\ 0)$. Если точка лежит на оси ординат, то её абсцисса равна нулю. Например, точка B (рис. 19, *а*) имеет координаты $(0;\ -2)$. Начало координат имеет абсциссу и ординату, равные нулю: $O(0;\ 0)$.

Задача. Построить точку $M(-3;\ 2)$.

► На оси абсцисс отметим точку с координатой -3 и проведём через неё перпендикуляр к этой оси. На оси ординат отметим точку с координатой 2 и проведём через неё перпендикуляр к оси ординат. Точка пересечения этих перпендикуляров — искомая точка M (рис. 19, *б*). ◁

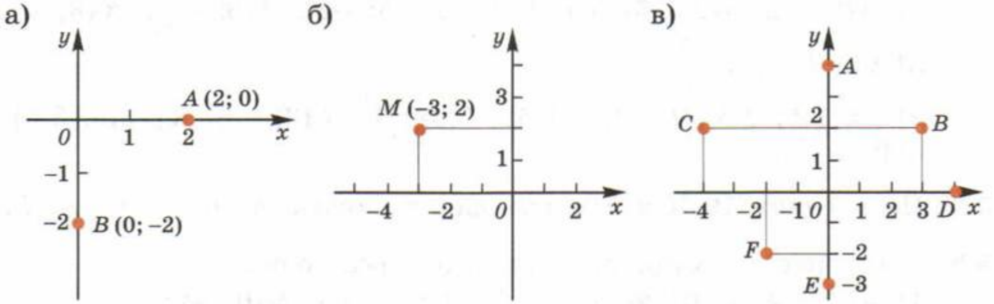


Рис. 19

Устные вопросы и задания

1. Что такое прямоугольная система координат?
2. Что такое координатная плоскость?
3. Что такое координатные углы? Как они нумеруются?
4. Что такое абсцисса точки M; ордината точки M?
5. Прочитать запись: $A(4;\ 7)$. Что она означает?
6. Какие особенности при записи координат имеют точки, лежащие: на оси абсцисс; на оси ординат?

Вводные упражнения

1. Назвать координаты точек O, A, B и C, отмеченных на числовой прямой (рис. 20).

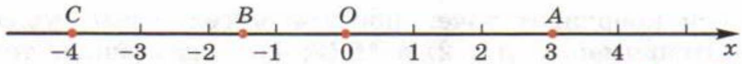


Рис. 20

2. Сравнить с нулём абсциссу x и ординату y точки, расположенной: в I координатном угле; во II координатном угле; в III координатном угле; в IV координатном угле.

Упражнения

523. Назвать абсциссу и ординату точки: (1; 0), (4; 0), (0; 2), (–6; 0), (0; –7), (0; 0).

524. Построить точки и указать, каким координатным углам они принадлежат:

1) $A(3;\ 4)$, $B(2;\ -5)$, $C(-2;\ 5)$, $E(-6;\ -2)$, $F\left(3;\ -\frac{1}{2}\right)$, $K(3;\ 0)$, $M(0;\ -1{,}5)$, $N\left(\frac{5}{2};\ \frac{3}{2}\right)$;

2) $A(-1{,}5;\ 2{,}5)$, $B(-2{,}5;\ 1{,}5)$, $C\left(3\frac{1}{2};\ 1\right)$, $F(2;\ -2)$, $K(-3{,}5;\ 3{,}5)$, $M(0;\ 2{,}5)$.

525. По рисунку 19, *в* найти координаты точек A, B, C, D, E, F.

526. Построить прямую, проходящую через точки:

1) $A(3;\ -2)$ и $B(-2;\ 2)$; 2) $M(2;\ 0)$ и $N(0;\ -2)$.

527. Построить отрезок по координатам его концов:

1) $A(3;\ 4)$, $B(-6;\ 5)$; 2) $M(0;\ -5)$, $N(4;\ 0)$.

528. Построить треугольник по координатам его вершин:

1) $K(-2;\ 2)$, $M(3;\ 2)$, $N(-1;\ 0)$;

2) $A(0;\ -1)$, $B(0;\ 5)$, $C(4;\ 0)$.

529. Построить прямоугольник по координатам его вершин:

$A(-2;\ 0)$, $B(-2;\ 3)$, $C(0;\ 3)$, $O(0;\ 0)$.

530. Даны три вершины $A(1;\ 2)$, $B(4;\ 2)$, $C(4;\ 5)$ квадрата $ABCD$. Найти координаты точки D и построить квадрат.

531. Построить прямую, проходящую через точки $A(0;\ 5)$ и $B(-2;\ 5)$. Чему равны ординаты точек, лежащих на прямой AB?

532. Построить прямую, проходящую через точки $A(-2;\ 3)$ и $B(-2;\ -1)$. Чему равны абсциссы точек, лежащих на прямой AB?

533. Даны точки $A(5;\ 3)$, $B(-1;\ -2)$, $C(0;\ 4)$, $D(-2;\ 0)$, $E(-2;\ 3)$. Построить точки, симметричные им относительно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) начала координат. Определить координаты полученных точек.

534. На плоскости расположены точки $A(2;\ 7)$, $B(3;\ 4)$, $C(2;\ -7)$, $D(-3;\ 4)$, $E(-2;\ 7)$. Определить, какая пара точек симметрична относительно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат; 3) начала координат.

535. Квадрат со стороной 4 расположен так, что центр его находится в начале координат, а стороны параллельны осям координат. Найти координаты вершин квадрата.

Диалог об истории

Рене Декарт

Рене Декарт

Профессор, Вы обещали рассказывать о жизни, детстве, увлечениях и интересах известных учёных. Во введении к этому параграфу Рене Декарт назван гениальным учёным. Расскажите нам о жизни Декарта, чтобы мы смогли понять, почему его считали гением. Интересно, знали ли о его гениальности при жизни?

Расскажу то, что сохранила история о Декарте. Но гением быть нелегко, нелегко живётся и близким гения. Итак, родился Рене во Франции в бедной дворянской семье и получил образование в колледже, принадлежавшем монашескому католическому ордену. Декарт из всех учебных предметов больше всего любил естествознание, географию и математику. После колледжа его увлечениями были путешествия, общение со сверстниками, наблюдение за природой. Декарт в своей жизни совершил отчаянный поступок: юношеская любовь к путешествиям подтолкнула его записаться в голландскую армию и посмотреть разные города, участвуя в военных действиях. Но после этих путешествий Рене надолго уединился для занятий философией, естественными науками и математикой, в чём достиг больших успехов.

В XVII в. самой прогрессивной страной была Голландия, тогда как во Франции, где жил Декарт, передовые учёные с их новыми идеями подвергались гонениям. Поэтому Декарт вынужден был переехать в Голландию.

Занимаясь научной работой в Голландии, где он прожил 20 лет, Декарт сделал ряд открытий не только в математике. Он написал фундаментальные труды по физике, астрономии и философии. Думаю, что в детские и юношеские годы мало кто считал Декарта гением, хотя он был очень любознательным ребёнком, а к концу его жизни об этом знали все его современники. Даже королева Швеции просила Декарта давать ей уроки философии, несмотря на то что католическая церковь того времени внесла труды Декарта в список запрещённых книг.

§ 30 Функция

В этом параграфе вводится одно из основных понятий математики — понятие функции (зависимой переменной). Рассматриваются три способа задания функции; демонстрируется процесс нахождения значения функции по заданному значению независимой переменной. Хотя с графиками, иллюстрирующими разные явления, вы уже встречались, но только теперь познакомитесь с определением понятия графика функции.

Нужно вспомнить:

- формулы движения, периметра и площади прямоугольника, плотности вещества;
- нахождение значений алгебраических выражений при заданных значениях входящих в него букв;
- построение точек на координатной плоскости;
- нахождение координат точек, расположенных на координатной плоскости.

Задача 1. Поезд движется из Москвы в Санкт-Петербург со скоростью 120 км/ч. Какой путь пройдёт поезд за t часов?

► Если обозначить искомый путь буквой s (в км), то ответ можно записать формулой $s = 120t$. ◁

При движении поезда путь s и время t изменяются. Поэтому их называют **переменными.**

Например, если $t=\frac{1}{2}$, то $s=120\cdot\frac{1}{2}=60$; если $t=2$, то $s=240$; если $t=2{,}5$, то $s=300$ и т. д.

Так как значения s зависят от значений t, то t называют **независимой переменной,** а s — **зависимой переменной** или **функцией.** Зависимость переменной s от переменной t называют **функциональной зависимостью.**

Для того чтобы подчеркнуть, что s зависит от t, пишут $s(t)$ (читается: «s от t»). Например,

$$s\left(\frac{1}{2}\right)=60,\ \ s(2)=240,\ \ s(2{,}5)=300.$$

Таким образом, формула $s=120t$ устанавливает правило вычисления пути s по заданному значению времени t. В этой задаче время t положительно и не может быть больше времени движения поезда от Москвы до Санкт-Петербурга.

Задача 2. Поезд движется из Москвы в Санкт-Петербург со скоростью 120 км/ч. За какое время он пройдёт путь, равный s километрам?

► Если обозначить искомое время буквой t (в часах), то ответ можно записать формулой $t=\frac{s}{120}$. ◁

Например, если $s=180$, то $t=1{,}5$; если $s=300$, то $t=2{,}5$. Таким образом, в этой задаче s является независимой переменной, а t — зависимой переменной, т. е. функцией $t(s)$. Например, $t(180)=1{,}5$; $t(300)=2{,}5$.

Формула $t=\frac{s}{120}$ устанавливает правило вычисления времени по заданному значению пути s. Здесь s может принимать положительные значения, не большие чем расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга.

Обычно в математике независимая переменная обозначается буквой x, а зависимая переменная — буквой y. В этом случае пишут $y(x)$. Но такое обозначение не является обязательным.

Например, в задаче 1 путь s является функцией времени t; при этом пишут $s(t)=120t$. В задаче 2 время t является функцией пути s, и поэтому пишут $t(s)=\frac{s}{120}$.

Функция может быть задана различными способами.

1. Функция может быть задана формулой.

Например, формула $y = 2x$ показывает, как по данному значению x вычислить соответствующее значение функции y.

Задача 3. Функция задана формулой $y = x^2 + x + 1$. Найти $y(-2)$, $y(0)$ и $y(1)$.

▶ 1) Подставляя в формулу $x = -2$, получаем $y(-2) = (-2)^2 + (-2) + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$;

2) $y(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$; 3) $y(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$.

Ответ. $y(-2) = 3$, $y(0) = 1$, $y(1) = 3$. ◁

Задача 4. Функция задана формулой $y = -3x + 5$. Найти значение x, при котором значение y равно -1.

▶ Подставляя в формулу вместо y число -1, получаем $-1 = -3x + 5$. Решая это уравнение, находим $3x = 5 + 1$, $x = 2$.

Ответ. $x = 2$. ◁

Задачу 4 можно решить, выразив из формулы $y = -3x + 5$ переменную x через y, т. е. по формуле $x = \frac{5 - y}{3}$ найти x при $y = -1$.

2. Функция может быть задана таблицей, например:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	4	9	16	25	36	49	64

Согласно этой таблице значению $x = 3$ соответствует $y = 9$, а значению $x = 5$ соответствует $y = 25$. Примеры табличного способа задания функции: таблица квадратов натуральных чисел, таблица кубов натуральных чисел, таблица прироста вклада в сберегательном банке в зависимости от суммы вклада.

3. Функция может быть задана графиком.

Для того чтобы наглядно представить функциональную зависимость, используют специальные рисунки (чертежи), которые называют **графиками**. Графики функций широко применяются в практике. С помощью графика часто изображают, например, зависимость температуры от времени (рис. 21); железнодорожники пользуются графиками движения; экономисты графически изображают рост производительности труда. При построении графиков

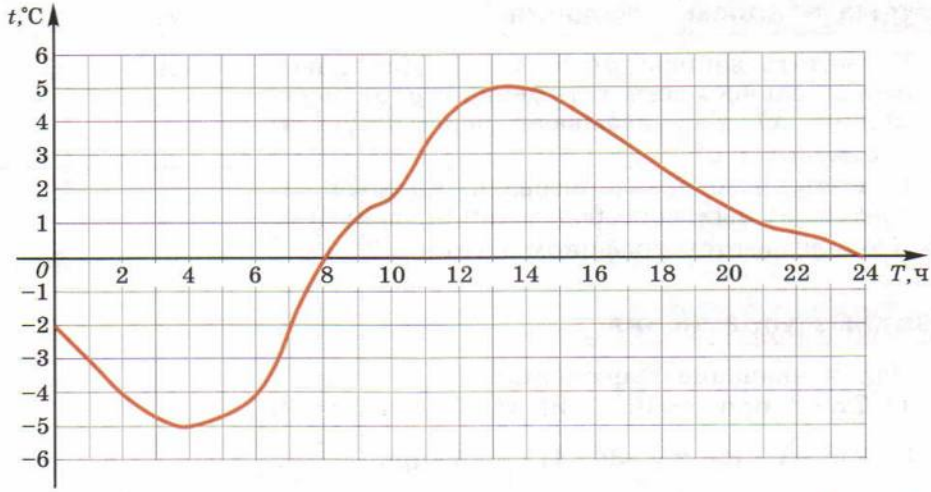


Рис. 21

в научных исследованиях и в современном производстве используются самопишущие приборы и компьютеры.

Допустим, что на координатной плоскости изображён график некоторой функции $y(x)$ (рис. 22). Для того чтобы по заданному графику найти значение функции $y(x)$ при каком-то определённом значении x, проведём через точку оси абсцисс с координатой x перпендикуляр к этой оси и найдём точку M пересечения его с графиком данной функции. Ордината точки пересечения и даст соответствующее значение функции.

! Определение. **Графиком функции** называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям независимой переменной, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Задача 5. Дана функция $y = x^2 + 2$. Выяснить, принадлежит ли графику этой функции точка с координатами:
1) (1; 3); 2) (2; 2).

► 1) Найдём значение y при $x = 1$: $y(1) = 1^2 + 2 = 3$. Так как $y(1) = 3$, то точка (1; 3) принадлежит графику функции.
2) $y(2) = 2^2 + 2 = 6$. Точка графика с абсциссой $x = 2$ имеет ординату $y = 6$, поэтому точка (2; 2) не принадлежит графику данной функции. ◁

Устные вопросы и задания

1. Прочитать запись: $y(x) = 2x - 3$. Как называется зависимость переменной y от переменной x? Как называют переменную x; переменную y?
2. Назвать и охарактеризовать каждый из трёх основных способов задания функции.
3. Что называется графиком функции?

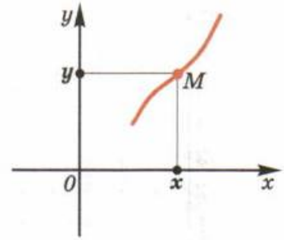


Рис. 22

Вводные упражнения

1. Найти значение выражения:
   1) $7x - 3$ при $x = 0$; 2) $x^2 + 1$ при $x = -2$;
   3) $-x^2 + 3$ при $x = -3$; 4) $\frac{2}{x} - 5$ при $x = \frac{1}{2}$.
2. На координатной плоскости отметить точки $A(-5;\ 2)$, $B(0;\ -3)$, $C(-3;\ -2)$, $D(4;\ 0)$.

Упражнения

536. (Устно.) Прочитать следующие выражения, назвать независимую и зависимую переменные:
$s(t) = 120t$; $p(x) = 17{,}8x$; $C(R) = 2\pi R$; $m(V) = 7{,}8V$;
$y(x) = \frac{1}{7}x + 3$; $t(s) = \frac{s}{120}$; $x(y) = 7y - 21$; $f(x) = 2 - 5x^2$.

537. Вычислить значение y при x, равном -2; -1; 0; 1; 2:
1) $y = 3x$; 2) $y = -2x$; 3) $y = -x - 3$; 4) $y = 20x + 4$.

538. Функция задана формулой $s = 60t$, где s — путь (в км) и t — время (в ч).
1) Определить $s(2)$, $s(3{,}5)$, $s(5)$.
2) Определить t, если $s = 240$.

539. Функция задана формулой $y = 2x - 1$.
1) Вычислить значение y при x, равном 10; $-4{,}5$; 15; -21.
2) Найти значение x, при котором значение y равно -19; 205; $-3\frac{1}{2}$; $0{,}6$; $-0{,}02$.

540. Функция задана формулой $p(x) = \frac{1}{3}(2x + 1)$.
1) Найти $p(3)$, $p(-12)$, $p(2{,}1)$.
2) Найти значение x, если $p(x) = 0$, $p(x) = 2{,}4$, $p(x) = -9$.

541. Функция задана формулой $f(x) = 2 - 5x^2$. Верно ли равенство:

1) $f(-2) = -18$; 2) $f\left(-\frac{1}{5}\right) = 1\frac{4}{5}$; 3) $f(4) = 78$; 4) $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$?

542. Функция задана формулой $y(x) = 2x^2 + 5x$.

1) Найти $y(0)$, $y(-1)$, $y(2)$, $y\left(\frac{1}{2}\right)$, $y\left(-\frac{3}{5}\right)$.

2) Верны ли равенства: $y(-3) = 3$, $y\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$, $y(1) = 9$, $y(2) = -18$?

543. (Устно.) Следующая таблица выражает зависимость атмосферного давления p от высоты h над уровнем моря:

h, км	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20
p, мм рт. ст.	760,0	716,0	674,0	596,1	525,7	462,2	404,8	198,1	40,9

1) Назвать давление на высоте 1 км, 3 км, 5 км, 10 км.

2) На какой высоте над уровнем моря давление равно 760,0 мм рт. ст., 462,2 мм рт. ст., 40,9 мм рт. ст.?

544. (Устно.) Результаты измерений температуры воздуха за сутки даны в следующей таблице:

Время, ч	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Температура, °C	-1	1	-3	-4	$2\frac{1}{2}$	5	8	$10\frac{1}{2}$	11	9	6	$3\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$

1) Назвать температуру в 6 ч, 18 ч, 24 ч.

2) В какое время температура была равна +1 °C, –4 °C, 11 °C?

545. На рисунке 21 изображён график изменения температуры воздуха в течение суток.

1) По графику найти температуру воздуха в 2 ч, 6 ч, 12 ч, 18 ч.

2) В какое время суток температура воздуха была равна 0 °C, –4 °C, 1 °C, 3 °C?

3) В какое время суток температура была самой высокой? самой низкой?

4) В какое время суток температура опускалась ниже 0 °C?

546. На рисунке 23 изображён график зависимости долготы дня от времени года. На оси абсцисс отмечены номера месяцев. По оси ординат отложена долгота дня, начиная с первого числа первого месяца.

1) В каком месяце долгота дня первого числа равна 600 мин, 750 мин, 850 мин?

2) В какое время года долгота первого дня месяца больше 700 мин, меньше 600 мин?

3) Какова долгота дня в первый день января, марта, мая, июля, октября?

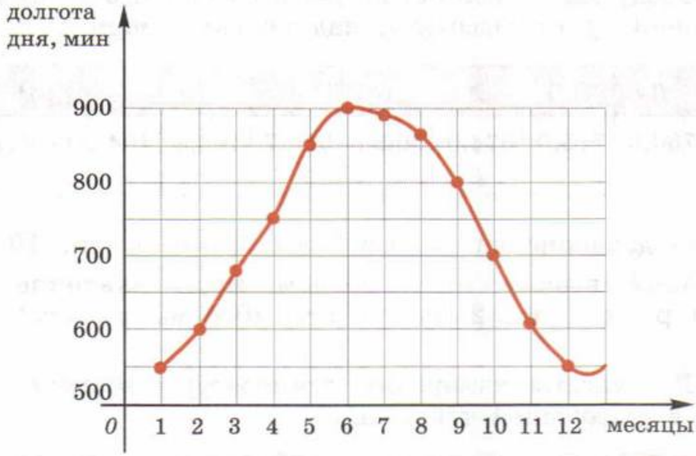


Рис. 23

547. Функция $y(x)$ задана графиком (рис. 24, *а*).

1) Найти $y(0)$, $y(2)$, $y(4)$, $y(-1)$.

2) При каком значении x значение функции равно 1, 2, 0?

3) Назвать несколько значений x, при которых значение функции положительно.

4) Назвать несколько значений x, при которых значение функции отрицательно.

548. Функция $y(x)$ задана графиком (рис. 24, *б*).

1) Найти $y(0)$, $y(-2)$, $y(1)$, $y(3)$.

2) При каком значении x значение функции равно 2, 0, –1, 1?

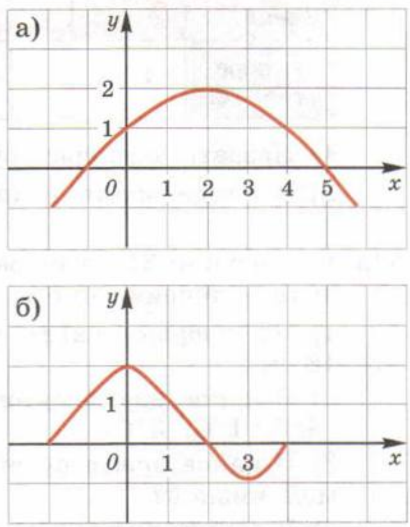


Рис. 24

3) Назвать несколько значений x, при которых значение функции положительно.

4) Назвать несколько значений x, при которых значение функции отрицательно.

549. Дана функция $y = x^2 - 5x + 6$. Выяснить, принадлежит ли графику этой функции точка с координатами:
1) (1; 2); 2) (−2; 0); 3) (−2; 20); 4) (3; 0).

550. Дана функция $y = x^3 - 1$. Выяснить, принадлежит ли графику этой функции точка с координатами:
1) (−1; 1); 2) (1; 0); 3) (3; 27); 4) (−2; 7).

551. Одна сторона прямоугольника равна x см, другая сторона на 3 см больше. Записать формулы периметра P и площади S этого прямоугольника.

1) Найти значение каждой из функций $P(x)$ и $S(x)$ при $x = 5$, $x = 2{,}1$.

2) При каком значении x периметр этого прямоугольника будет равен 38 см, 46 см?

552. Плотность гранита составляет 2600 кг/м^3. Выразить массу m как функцию от его объёма V.

1) Найти значение m при $V = 1{,}5$ м^3; $V = 10$ м^3.

2) Каков должен быть объём гранита, чтобы его масса была 5,2 ц; 7,8 т?

553. Заполнить таблицу (перечертив её в тетрадь):

1)

x				4	0	−2
$y(x) = \frac{1}{2}x + 3$	5	7	−13			

2)

x	−2	−1	0			
$y = -7x + 1$				1	8	15

554. График функции $y(x)$ — ломаная $ABCDE$, где $A(-2;\ 2)$, $B(0;\ 4)$, $C(5;\ 4)$, $D(9;\ 2)$, $E(13;\ -2)$.

1) Построить этот график.

2) Используя график, найти $y(-1)$, $y(0)$, $y(10)$.

3) При каком значении x значение функции $y(x)$ равно 3; −1; 0?

4) Указать три значения x, при которых функция принимает положительные значения, и три значения x, при которых функция принимает отрицательные значения.

555. График функции — ломаная $EFKLM$, где $E(-1; 1)$, $F(2; -2)$, $K(5; -2)$, $L(6; -3)$, $M(7; -6)$.

1) Построить этот график.

2) По графику найти натуральные значения x, при которых значение функции равно -2.

3) По графику найти целые значения x, при которых значение функции больше -2.

Диалог об истории

О функции и о том, почему прямоугольная система координат носит имя Декарта

Вы, наверное, уже поняли, что понятие *функция* является одним из основных понятий в математике.

Да, конечно. Хотя бы потому, что с графиками, формулами и таблицами, которыми задают функции, мы встречаемся на всех уроках и даже в повседневной жизни. Интересно, как и когда возникло это понятие?

Исторически понятие функции возникло одновременно с понятием переменной величины. Как я уже говорил, зависимости между величинами в древности не называли функциями, но их уже рассматривали. Первые представления о зависимых переменных были связаны с геометрическими и физическими величинами.

Например, в Древнем Вавилоне 4—5 тысяч лет назад установили, что площадь круга является функцией его радиуса (площадь круга они приближённо вычисляли по формуле $S=3R^2$). Таблицы квадратов и кубов чисел, используемые вавилонскими учёными, представляли собой фактически табличный способ задания функций $y=x^2$ и $y=x^3$.

В Древней Греции, несмотря на высокое развитие математической науки, общего понятия функции не имели. Хотя составлением различных таблиц, в частности, тех, в которых определялись зависимости движения небесных тел, занимались математики и астрономы.

Учёный из Хорезма *ал-Бируни (973—1048)* в XI в. вплотную подошёл к представлению о функциях любого аргумента. Исследование общих зависимостей двух величин связывают с именем французского учёного XIV в. *Н. Оресма (ок. 1323—*

ок. 1382). Он изображал интенсивность процессов отрезками, расположенными перпендикулярно к горизонтальной прямой. Концы этих отрезков образовывали линию, называемую им *линией активности* или *линией верхнего края*.

Заслуга Оресма состоит в том, что он первым ввёл понятие координат на плоскости по аналогии с географическими координатами на карте, изобретёнными *Гиппархом (ок. 190 до н. э. — ок. 120 до н. э.)*.

А я думала, что Декарт первым изобрёл координаты, и географические карты стали составляться благодаря изобретённой им координатной плоскости.

Ну что ты, простейшие географические карты создавались с древних времён, как только люди начали путешествовать по свету и объяснять другим, как пройти или проехать в определённое место. Но у древних естествоиспытателей, так же как и у Оресма, использовались только *неотрицательные координаты* точек.

Значит, они фактически работали с координатами только в первом координатном угле?

Действительно, и Оресм, и древние учёные (в силу ещё и того, что у них было особенное, негативное отношение к отрицательным числам) выполняли все расчёты, как бы мы сейчас сказали, в первом координатном угле. А для простейших практических задач в действиях со многими реальными физическими и геометрическими величинами им вполне хватало первого координатного угла.

А почему всё же именем Декарта назвали систему координат? Не именем Оресма или Гиппарха?

Потому что именно Декарту принадлежит идея *метода координат*. И он первым стал использовать для обозначения положения точки на плоскости не только положительные числа и нуль, но и отрицательные числа.

После открытий Декарта математики начали строить разные графики, изобрели новые функции?

По сути, ты права. Именно с XVII в. начались серьёзные исследования европейских учёных *Ферма (1601—1665)*, *Ньютона*, *Лейбница* и др. в области функционального анализа. Определение функции впервые было дано в 1718 г. швейцарским математиком *И. Бернулли (1667—1748)*: «Функцией переменной величины называется количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных».

Позже, в 1748 г., великий учёный, академик Петербургской академии наук *Л. Эйлер (1707—1783)*, уточнил это определение. Он отождествлял функцию с её аналитическим выражением, с формулой. Однако уже в XIX в. стало ясно, что существует множество функций, которые нельзя задать формулой.

Леонард Эйлер

Как же их тогда задают?

В частности, функцию можно задать *описанием*. К примеру, если каждому равностороннему треугольнику поставить в соответствие описанную около него окружность, то окружность будет функцией равностороннего треугольника, вписанного в неё.

В связи с тем что существует множество функций, не задающихся формулой, гениальный русский математик *Н. И. Лобачевский (1792—1856)* в 1834 г. развил определение функции, данное Эйлером. Вслед за ним в 1837 г. немецкий математик *П. Г. Лежен Дирихле (1805—1859)* дал общее определение функции, близкое к тому, которым и мы будем пользоваться.

§ 31 Функция $y = kx$ и её график

С помощью формулы $y = kx$ выражаются многие из уже знакомых вам зависимостей реальных величин: пути от времени (при постоянной скорости), стоимости покупки от количества единиц товара (при установленной цене за единицу), массы тела от объёма вещества и т. д. Эти зависимости — прямо пропорциональные и в них независимая переменная принимает только неотрицательные значения. Прямая пропорциональная зависимость — частный случай функции $y = kx$, где x — любое число. С этой функцией, её свойствами и графиком вы познакомитесь в данном параграфе.

Нужно вспомнить:

- названия осей координат и координат точки на плоскости;
- построение точек с заданными координатами на координатной плоскости;
- представление о прямой и её построение по двум точкам.

Найдём площадь прямоугольника, основание которого равно 3, а высота равна x. Если искомую площадь обозначить буквой y, то ответ можно записать формулой $y=3x$.

Если основание прямоугольника равно k, то зависимость между высотой x и площадью y выразится формулой $y=kx$, где k и x — положительные числа. Если рассмотреть формулу $y=kx$, где k и x — произвольные числа, то каждое заданное значение k определяет некоторую функцию

$$y=kx.$$

Построим график этой функции при $k=2$, т. е. график функции $y=2x$.

По формуле $y=2x$ вычислим значения y для нескольких значений x. Возьмём, например, $x=2$, получим $y=4$. Если $x=0$, то $y=2\cdot 0=0$; если $x=-3$, то $y=2\cdot(-3)=-6$ и т. д. Построим точки с найденными координатами: (2; 4), (0; 0), (−3; −6) и т. д. Приложив линейку, можно убедиться, что все построенные точки лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Эта прямая и является графиком функции $y=2x$ (рис. 25, *а*).

Можно показать, что графиком функции $y=kx$ при любом значении k является прямая, проходящая через начало координат.

Из курса геометрии известно, что через две точки проходит единственная

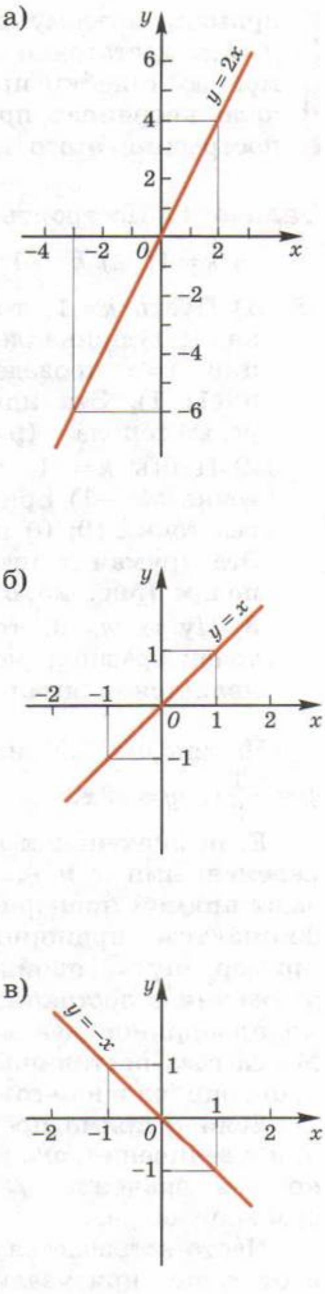


Рис. 25

прямая, поэтому для того чтобы построить график функции $y=kx$, достаточно построить две точки графика, а затем с помощью линейки провести через эти точки прямую. Так как начало координат принадлежит графику функции $y=kx$, то для построения этого графика достаточно найти ещё одну точку.

Задача 1. Построить график функции $y=kx$ при:

1) $k=1$; 2) $k=-1$; 3) $k=0$.

► 1) Пусть $k=1$, тогда $y=x$. Если $x=1$, то $y=1$. Поэтому точка (1; 1) принадлежит графику. Для построения графика функции $y=x$ проведём прямую, проходящую через точки (0; 0) и (1; 1). Эта прямая делит первый и третий координатные углы пополам (рис. 25, *б*).

2) Пусть $k=-1$, тогда $y=-x$. Если $x=1$, то $y=-1$. Поэтому точка (1; −1) принадлежит графику. Прямая, проходящая через точки (0; 0) и (1; −1), является графиком функции $y=-x$. Эта прямая делит второй и четвёртый координатные углы пополам (рис. 25, *в*).

3) Пусть $k=0$, тогда $y=0$. Это означает, что ординаты всех точек графика равны нулю. Поэтому графиком этой функции является прямая, совпадающая с осью абсцисс. ◁

На рисунке 26 изображены графики функций $y=4x$, $y=\frac{1}{5}x$, $y=-\frac{1}{2}x$, $y=-3x$.

Если значения x положительны и $k>0$, то зависимость между переменными x и y, выражаемую формулой $y=kx$, обычно называют **прямой пропорциональной зависимостью**, а число k — **коэффициентом пропорциональности**. Например, путь, пройденный телом при движении с постоянной скоростью, прямо пропорционален времени движения. Масса газа постоянной плотности прямо пропорциональна его объему.

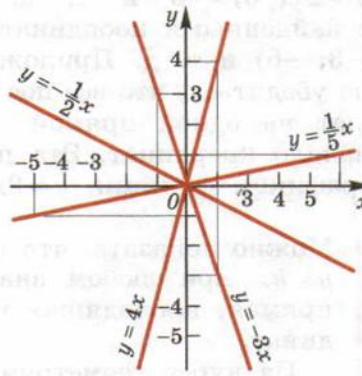


Рис. 26

Если y прямо пропорционален x, то при увеличении значения x в несколько раз значение y увеличивается во столько же раз.

Часто встречается такая зависимость y от x, что при увеличении значения x в несколько раз значение y уменьшается во столько же раз. Эта зависимость называется **обратной пропорциональностью** и выражается формулой $y=\frac{k}{x}$, где $k>0$, $x>0$.

Например, при равномерном движении скорость прохождения одного и того же участка пути обратно пропорциональна времени. Плотность вещества при постоянной массе обратно пропорциональна его объёму.

Устные вопросы и задания

1. Что является графиком функции $y=kx$?
2. Через какую точку проходят все графики функций вида $y=kx$?
3. Как можно построить график функции $y=kx$?
4. При каких значениях x и k формула $y=kx$ выражает прямую пропорциональную зависимость?
5. Какой формулой выражается обратная пропорциональная зависимость?
6. В каких четвертях расположен график функции $y=kx$, если $k>0$; $k<0$?

Вводные упражнения

1. Функция задана формулой $y=-2x$. Найти $y(0)$; $y(-3)$; $y\left(-\frac{1}{4}\right)$; $y(0{,}5)$.
2. Функция задана формулой $y=\frac{1}{3}x$. Найти значение x, при котором значение y равно -5; $\frac{1}{6}$; $0{,}2$; 0.
3. На координатной плоскости построить точки $K(1;\ 5)$; $M\left(-3;\ \frac{1}{2}\right)$; $N(-2;\ -4)$; $P\left(0;\ -1\frac{1}{2}\right)$; $Q(1;\ 0)$.
4. Найти расстояние, которое проходит путник за 3 ч, двигаясь со скоростью 4 км/ч.
5. Найти время, за которое велосипедист преодолевает расстояние в 20 км, если движется со скоростью 8 км/ч.

Упражнения

556. Книга стоит 200 р. Выразить формулой зависимость между купленным числом n экземпляров этой книги и уплаченной суммой y, выраженной в рублях. Чему равно $y(6)$, $y(11)$?

557. Автомобиль «Волга» движется по шоссе со скоростью 80 км/ч. Записать формулу, выражающую зависимость длины пути s (в км) от времени движения t (в ч). Чему равно $s(3)$, $s(5{,}4)$?

558. Построить график функции:

1) $y=3x$; 2) $y=5x$; 3) $y=-4x$; 4) $y=-0{,}8x$.

559. Построить график функции:

1) $y=1{,}5x$; 2) $y=-2{,}5x$; 3) $y=-0{,}2x$.

560. Построить график функции:

1) $y=2\frac{1}{2}x$; 2) $y=\frac{1}{4}x$; 3) $y=0{,}6x$.

561. Построить график функции, заданной формулой $y=-1{,}5x$. Найти по графику:

1) значение y, соответствующее значению x, равному 1; 0; 2; 3;
2) значение x, если значение y равно -3; 4,5; 6;
3) несколько целых значений x, при которых значения y положительны (отрицательны).

562. Построить график функции, заданной формулой $y=0{,}2x$. Найти по графику:

1) значение y, соответствующее значению x, равному -5; 0; 5;
2) значение x, если значение функции равно -2; 0; 2;
3) несколько значений x, при которых значения y отрицательны (положительны).

563. Построить график функции и указать, внутри каких координатных углов расположен этот график:

1) $y=\frac{1}{3}x$; 2) $y=-\frac{1}{3}x$; 3) $y=4{,}5x$; 4) $y=-4{,}5x$.

564. Какие из точек $A(5;\ -3)$, $B(-2;\ 4)$, $C(0;\ 0)$, $D(2;\ 1)$, $E(-5;\ 2{,}5)$ принадлежат графику функции, заданной формулой $y=\frac{1}{2}x$?

565. Прямая пропорциональная зависимость площади S прямоугольника от его ширины x представлена таблицей:

x, см	3,1	2,5	1,3	0,9	0,14		
$S(x)$, см^2					0,7	0,3	0,1

Устно найти по таблице коэффициент пропорциональности k и заполнить таблицу.

566. Масса m тела прямо пропорциональна его объёму V. Устно найти коэффициент пропорциональности p из данной таблицы и заполнить таблицу:

V, см^3	11,2	10,5	9,3			
$m(V)$, г			3,1	7,2	0,63	0,45

567. Тело, двигаясь равномерно, прошло путь AB за 5 с. Двигаясь обратно, оно увеличило скорость и прошло путь BA за 2,5 с. Во сколько раз увеличилась скорость движения тела на обратном пути?

568. Для перевозки некоторого количества зерна автомашина, имеющая грузоподъёмность 4 т, сделала 15 рейсов. Какую грузоподъёмность должна иметь автомашина, чтобы такое же количество зерна перевезти за 12 рейсов?

569. Обратная пропорциональность $y=\frac{k}{x}$ представлена таблицей. Устно найти k и заполнить таблицу:

x	6	4,5	3	2,4				
y				0,6	1,8	1,5	0,6	0,1

570. По графику функции $y=kx$ определить знак коэффициента k: 1) рис. 27, *а*; 2) рис. 27, *б*.

571. Зависимость между переменными x и y выражена формулой $y=kx$. Определить k, если $y=-5$ при $x=2{,}5$.

572. Прямая OA проходит через начало координат и точку $A(0{,}5;\ 7)$. Графиком какой из следующих функций является эта прямая: $y=7x$, $y=-14x$, $y=14x$?

573. Построить график функции $y=kx$, если известно, что ему принадлежит точка B: 1) $B(2;\ -3)$; 2) $B\left(3\frac{1}{3};\ -2\right)$. График какой из этих функций проходит через точку $M(-10;\ 15)$?

574. Плот плывёт по реке со скоростью 2 км/ч. Выразить путь s, пройденный плотом за x часов. Вычислить путь, пройденный плотом за 1 ч, 2,5 ч, 4 ч. Построив график зависимости пути плота от времени движения, найти по графику время, за которое плот пройдёт 6 км.

а) б)

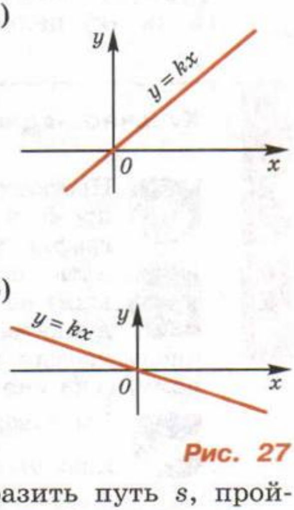


Рис. 27

575. Пешеход идёт со скоростью 3 км/ч. Выразить путь s, пройденный пешеходом за t часов. Построить график пути в зависимости от времени. Найти по графику путь, пройденный пешеходом за 0,5 ч, 1 ч, 1 ч 30 мин.

576. На рисунке 28 изображены графики движения автомобиля и автобуса. Используя рисунок, ответить на вопросы:

1) Какой путь прошёл за первые 3 ч автобус; автомобиль?

2) Какой была скорость автомобиля; автобуса до остановки?

3) Какой путь прошла каждая из автомашин до остановки?

4) Сколько времени двигался до остановки автобус; автомобиль?

5) Какой была продолжительность стоянок автобуса и автомобиля?

6) Какой стала скорость движения автобуса; автомобиля после стоянки?

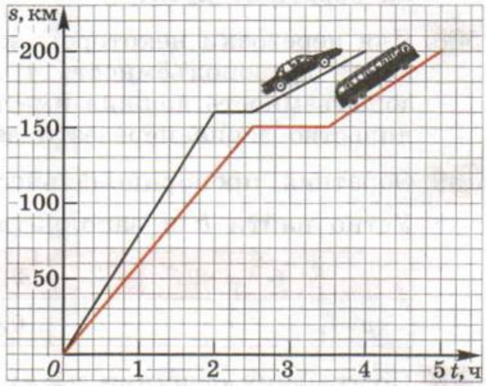


Рис. 28

577. Двигаясь равномерно, автомобиль прошёл путь в 120 км. Записать формулу зависимости времени движения t от его скорости v (в км/ч). Найти $t(60)$; $t(45)$; $t(50)$.

578. Двигаясь равномерно, велосипедист проехал 70 км. Записать формулу зависимости скорости велосипедиста v от времени t (в часах) нахождения его в пути. Найти $v(5)$; $v(7)$; $v(3{,}5)$.

Шаг вперёд

Кусочно заданные функции


Профессор, есть ещё какие-то способы задания функций, кроме уже знакомых нам четырёх (формулой, таблицей, графиком и описанием)?


Есть способ, который первоначально являлся описательным, но постепенно приобрёл вид задания формулой. Подумайте, как записать функцию, значения которой равны числу x, если оно неотрицательно, и числу, ему противоположному, если оно отрицательно.


Вы говорите о модуле числа, т. е. имеете в виду функцию $y=|x|$, так как $|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x<0. \end{cases}$


Верно. С модулем числа математики работают часто, поэтому изобрели ему особое обозначение. Я хочу, чтобы вы посмотрели, как выглядит график функции $y=|x|$ (рис. *а*),

и поняли, как строится график функции $y=\left|\frac{1}{2}x\right|$ (рис. *б*). А потом самостоятельно постройте графики функций $y=|3x|$ и $y=|0{,}3x|$.

Приведу примеры ещё трёх функций, имеющих свои особые обозначения. А вы подумайте, почему их и функцию $y=|x|$ иногда называют *кусочно заданными*.

1) Знак числа x: $f(x)=\operatorname{sign}x=\begin{cases}1, \text{ если } x>0,\\ 0, \text{ если } x=0,\\ -1, \text{ если } x<0.\end{cases}$

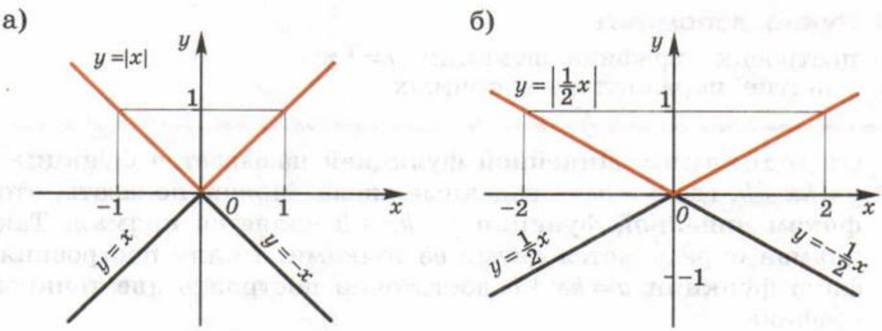
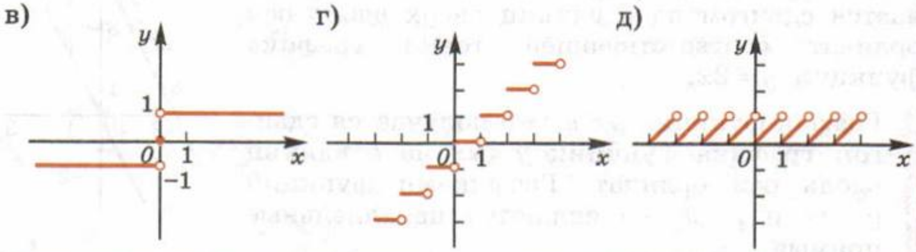


График этой функции показан на рисунке *в*. О точках с координатами (0; 1) и (0; −1) говорят, что они «выколоты», так как не принадлежат графику. Очевидно, например, что $\operatorname{sign}(-7)=-1$, $\operatorname{sign}3=1$, а $\operatorname{sign}0=0$.

2) Целая часть числа x: $f(x)=[x]$, где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x. Эту функцию называют ещё «антье x». Например: $[2{,}9]=2$, $[-1{,}8]=-2$. График этой функции изображён на рисунке *г*.

3) Дробная часть числа x: $f(x)=\{x\}$, где $\{x\}=x-[x]$. Например: $\{2{,}9\}=2{,}9-2=0{,}9$; $\{-1{,}8\}=-1{,}8-(-2)=0{,}2$. График этой функции изображён на рисунке *д*.



§ 32 Линейная функция и её график

Линейную функцию можно назвать важнейшей, так как очень много законов природы и практических взаимосвязей выражаются с помощью этой функции. На ближайших уроках вы изучите эту функцию и поймёте, как строить график функции $y=kx+b$, если уже построен график функции $y=kx$.

Нужно вспомнить:

- построение графика функции $y=kx$;
- понятие параллельных прямых.

! Определение. **Линейной функцией** называется функция вида $y=kx+b$, где k и b — заданные числа. Можно показать, что **графиком линейной функции** $y=kx+b$ является **прямая.** Так как прямая определяется двумя её точками, то для построения графика функции $y=kx+b$ достаточно построить **две** точки этого графика.

Задача 1. Построить график функции $y=2x+5$.

► При $x=0$ значение функции $y=2x+5$ равно 5, т. е. точка (0; 5) принадлежит графику. Если $x=1$, то $y=2\cdot1+5=7$, т. е. точка (1; 7) также принадлежит графику. Построим точки (0; 5) и (1; 7) и проведём через них прямую. Эта прямая и является графиком функции $y=2x+5$ (рис. 29). ◁

Заметим, что каждая точка графика функции $y=2x+5$ имеет ординату, на 5 единиц большую, чем точка графика функции $y=2x$ с той же абсциссой. Это означает, что каждая точка графика функции $y=2x+5$ получается сдвигом на 5 единиц вверх вдоль оси ординат соответствующей точки графика функции $y=2x$.

График функции $y=kx+b$ получается сдвигом графика функции $y=kx$ на b единиц вдоль оси ординат. Графиками функций $y=kx$ и $y=kx+b$ являются параллельные прямые.

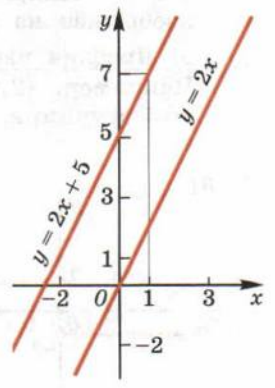


Рис. 29

Отметим, что для построения графика линейной функции иногда удобно находить точки пересечения этого графика с осями координат.

Задача 2. Найти точки пересечения графика функции $y=-2x+4$ с осями координат и построить график.

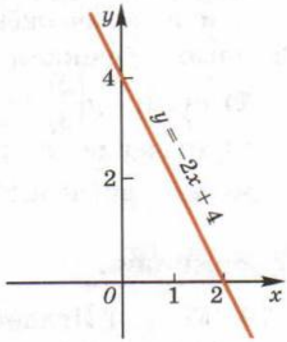


Рис. 30

► Найдём точку пересечения графика с осью абсцисс. Ордината этой точки равна 0. Поэтому $-2x+4=0$, откуда $x=2$. Итак, точка пересечения графика с осью абсцисс имеет кординаты (2; 0). Найдём точку пересечения графика с осью ординат. Так как абсцисса этой точки равна 0, то $y=-2\cdot 0+4=4$.

Итак, точка пересечения графика с осью ординат имеет координаты (0; 4). График функции $y=-2x+4$ изображён на рисунке 30. ◁

Задача 3. Построить график линейной функции $y=kx+b$ при $k=0$, $b=2$.

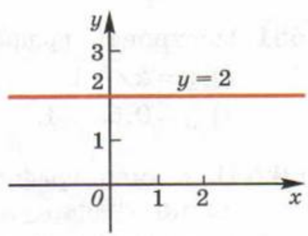


Рис. 31

► Если $k=0$ и $b=2$, то $y=2$. Ординаты всех точек графика равны 2, и поэтому графиком функции является прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку (0; 2) (рис. 31). ◁

С помощью линейной функции описываются многие физические процессы. Например, при равноускоренном движении скорость является линейной функцией времени: $v(t)=v_0+at$.

Устные вопросы и задания

1. Какая функция называется линейной?
2. Что является графиком функции $y=kx+b$?
3. Как получить график функции $y=kx+b$, если имеется график функции $y=kx$?
4. Как выглядит график функции $y=kx+b$ при $k=0$ и $b\neq 0$?

Вводные упражнения

1. Построить график функции:

1) $y=5x$; 2) $y=\frac{2}{3}x$; 3) $y=-\frac{3}{4}x$; 4) $y=-2{,}5x$.

2. Как расположены по отношению друг к другу прямые a и b, a и c, изображённые на рисунке 32?

3. Задана функция $y=-3x+1$. Найти:

1) $y(-2)$; $y\left(\frac{2}{3}\right)$; $y(0)$; $y(-0{,}1)$;

2) значение x, при котором функция принимает значение, равное 0; -2; $\frac{1}{2}$; $-1{,}1$.

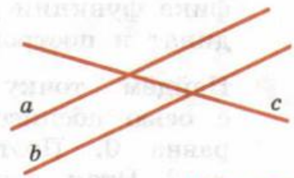


Рис. 32

Упражнения

579. (Устно.) Является ли линейной функция, заданная формулой:

1) $y=-x-2$; 2) $y=2x^2+3$; 3) $y=\frac{x}{3}$;

4) $y=250$; 5) $y=\frac{3}{x}+8$; 6) $y=-\frac{x}{5}+1$?

580. Дана линейная функция $y(x)=3x-1$.

1) Найти $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$.

2) Найти значение x, если $y(x)=-4$, $y(x)=8$, $y(x)=0$.

581. Построить график функции:

1) $y=2x+1$; 2) $y=-2x+1$; 3) $y=3x-4$;

4) $y=0{,}5x-1$; 5) $y=\frac{1}{4}x-2$; 6) $y=\frac{1}{2}x+2$.

582. Построить график функции, заданной формулой $y=2x+3$. Найти по графику:

1) значение y, соответствующее значению x, равному -1; 2; 3; 5;

2) при каком значении x значение y равно 1; 4; 0; -1.

583. Построить график функции, заданной формулой $y=-2x-1$. Найти по графику:

1) значение y, если значение x равно 2; -2; $-1{,}5$;

2) при каком значении x значение y равно -5; 2; 6.

584. Линейная функция задана формулой $y=x+2$. Принадлежат ли точки $M(0;\ 2)$, $N(1;\ 3)$, $A(-1;\ 1)$, $B(-4{,}7;\ -2{,}7)$, $C\left(-2\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ графику этой функции?

585. Не выполняя построения графика функции $y=2x-\frac{1}{3}$, выяснить, проходит ли он через точку:

1) $\left(0; -\frac{1}{3}\right)$; 2) $(1; -2)$; 3) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$; 4) $(2; 3)$.

586. Построить график функции и указать по графику несколько значений x, при которых значения функции положительны; отрицательны: 1) $y=-0{,}5x-2$; 2) $y=-4x+3$.

587. Построить график функции, найдя точки пересечения его с осями координат:

1) $y=2x+2$; 2) $y=-0{,}5x-1$; 3) $y=4x+8$;

4) $y=-3x+6$; 5) $y=2{,}5x+5$; 6) $y=-6x-2$.

588. Построить график функции:

1) $y=7$; 2) $y=-3{,}5$; 3) $y=0{,}25$; 4) $y=0$.

589. (Устно.) Как из графика функции $y=-2x$ можно получить графики функций $y=-2x+3$ и $y=-2x-3$?

590. (Устно.) Как из графика функции $y=\frac{1}{3}x$ можно получить графики функций $y=\frac{1}{3}x+2$ и $y=\frac{1}{3}x-2$?

591. 1) На складе было 400 т угля. Ежедневно на склад привозили еще по 50 т. Выразить формулой зависимость количества угля p (в тоннах) от времени t (в днях).

2) На складе было 400 т угля. Ежедневно из этого запаса расходовалось по 50 т. Выразить формулой зависимость количества угля p (в тоннах), находящегося на складе, от времени t (в днях).

592. Турист проехал от города 10 км на автобусе, а затем продолжил движение в том же направлении пешком со скоростью 5 км/ч. На каком расстоянии y от города турист был через x часов ходьбы?

593. На рисунках 33, *а*, *б* изображены пары параллельных прямых. Записать формулой функцию, график которой — прямая, проходящая через:

1) начало координат на рисунке 33, *а*;

2) точку с координатами $(0; 3)$ на рисунке 33, *б*.

594. Найти значение b, если известно, что график функции $y=-3x+b$ проходит через точку: 1) $M(-2; 4)$; 2) $N(5; 2)$.

595. Найти значение k, если известно, что график функции $y=kx+2$ проходит через точку: 1) $P(-7; -12)$; 2) $C(3; -7)$.

596. Определить координаты точек пересечения с осями координат графика функции $y=13-x$ и вычислить площадь прямоугольного треугольника, ограниченного прямой и координатными осями.

597. Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y=-2x+7$ и $y=0,5x-5,5$;

2) $y=1-2x$ и $y=x-5$.

598. Найти значения k и b, если известно, что график функции $y=kx+b$ проходит через точки $(2; 10)$ и $(-7; -10)$.

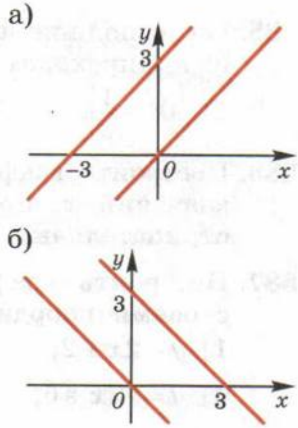


Рис. 33

599. Прямые $y=0$, $y=3$, $x=0$, $x=2$ образуют прямоугольник. Принадлежит ли точка $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ диагонали этого прямоугольника?

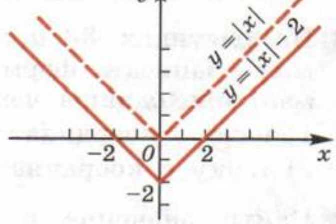
Шаг вперёд

Графики функций $y=|x|+a$ и $y=|x+a|$

В этом параграфе вы познакомились с одним очень интересным действием — *сдвигом графика функции* вдоль координатных осей.

Да, мы прикладывали линейку к графику функции $y=kx$ и двигали её вверх или вниз на b единиц в зависимости от знака числа b в формуле функции $y=kx+b$. Проводили новую, параллельную первой, прямую и получали график функции $y=kx+b$.

Раз уж я вас научил строить график функции $y=|x|$, давайте подвигаем и его. Построим, например, график функции $y=|x|-2$.

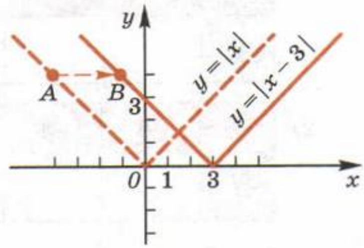


При каждом значении x значение функции $y=|x|-2$ на 2 единицы меньше значения функции $y=|x|$. Поэтому *график функции $y=|x|-2$ можно получить сдвигом графика функции $y=|x|$* ***вниз*** *на 2 единицы.*

График проходит через точки $(-2; 0)$ и $(2; 0)$, так как $|x|-2=0$ при $x=-2$ и $x=2$. Поэтому график функции $y=|x|-2$ можно также построить по трём точкам: $(0; -2)$, $(-2; 0)$ и $(2; 0)$.

Интересный график. По нему, кстати, сразу видно, что функция $y=|x|-2$ принимает отрицательные значения при x, находящихся между числами -2 и 2, а при $x<-2$ и $x>2$ принимает положительные значения.

Теперь давайте покажем, что график функции $y=|x-3|$ можно получить *сдвигом графика функции* $y=|x|$ ***вправо*** *на 3 единицы*.



В самом деле, так как $|x|=0$ при $x=0$, а $|x-3|=0$ при $x=3$, то точка $(3; 0)$ графика функции $y=|x-3|$ получается сдвигом вправо на 3 единицы точки $(0; 0)$ графика функции $y=|x|$. Точно так же точка $(4; 1)$ графика $y=|x-3|$ получается сдвигом вправо на 3 единицы точки $(1; 1)$ графика $y=|x|$. И вообще любая точка B графика функции $y=|x-3|$ получается сдвигом *вправо* на 3 единицы соответствующей точки A графика $y=|x|$.

Пожалуйста, постройте графики следующих функций:

1) $y=|x|+1$; 2) $y=|x|-3$; 3) $y=|x-2|$;
4) $y=|x+2|$; 5) $y=|x-1|-1$; 6) $y=|x+3|-2$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

600. 1) Построить треугольник ABC по координатам его вершин $A(-3; 0)$, $B(4; 5)$, $C(0; -4)$. Найти координаты точки пересечения стороны AB с осью Oy.

2) Построить треугольник DCE по координатам его вершин $D(-4; 0)$, $C(0; -2)$, $E(5; 3)$. Найти координаты точки пересечения стороны CE с осью Ox.

601. Функция $y=y(x)$ задана графиком. Пользуясь этим графиком (рис. 34), найти:

1) $y(-2)$; $y(1)$; $y(3)$; $y(0)$;

2) значение x, при котором функция принимает значение, равное -1; 0; 3;

3) координаты точек пересечения графика с осями координат;

4) целые значения x, при которых функция положительна;

5) целые значения x, при которых функция отрицательна.

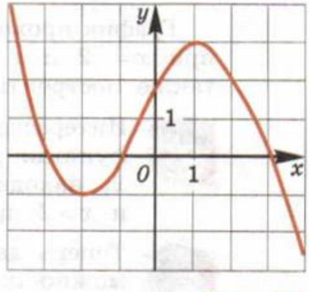


Рис. 34

602. Функция $y = kx$ задана таблицей. Найти коэффициент k и заполнить таблицу:

1)

x	-5	$-\frac{1}{2}$	0	3		
y				-12	16	$\frac{1}{4}$

2)

x	-8	-4	2	1			
y				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0

603. 1) Велосипедист движется со скоростью 10 км/ч. Записать формулу зависимости его пути s (в километрах) от времени движения t (в часах). Построить график этой зависимости на первых пяти километрах пути.

2) Плотность железа равна 7,8 г/см³. Записать формулу зависимости массы m (в г) железа от его объёма v (в см³). Построить график этой зависимости.

604. Найти значение k, если график функции $y = kx$ проходит через точку: 1) $B(-30;\ 3)$; 2) $A(4;\ -80)$.

605. Записать формулой функцию, график которой — прямая, изображённая:

1) на рисунке 35, *а*; 2) на рисунке 35, *б*;

3) на рисунке 35, *в*; 4) на рисунке 35, *г*.

606. При начале нагревания вода в кипятильнике имела температуру 6 °С. При нагревании температура воды повышалась каждую минуту на 2 °С. Найти формулу, выражающую изменение температуры T воды в зависимости от времени t (в минутах) её нагревания. Будет ли функция $T(t)$ линейной? Чему равны $T(20)$, $T(31)$? Через сколько минут после начала нагревания вода закипит?

607. Найти координаты точек пересечения графика с осями координат:

1) $y=-1{,}5x+3$; 2) $y=-2x+4$;

3) $y=1{,}5x-6$; 4) $y=0{,}8x-0{,}6$;

5) $y=-\frac{1}{4}x+2$; 6) $y=\frac{2}{3}x-5$.

Построить графики этих функций.

608. Построить график функции $y=kx+1$, если известно, что ему принадлежит точка:

1) $M(1;\ 3)$; 2) $M(2;\ -7)$.

609. Построить график функции $y=-3x+b$, если известно, что этот график проходит через точку:

1) $A(-2;\ 4)$; 2) $B(5;\ 2)$.

610. В одной системе координат построить графики функций:

1) $y=\frac{1}{2}x+1$; $y=\frac{1}{2}x$; $y=-\frac{1}{2}x-3$;

2) $y=\frac{1}{4}x+1$; $y=-\frac{1}{4}x+1$; $y=-\frac{1}{4}x-1$;

3) $y=0$; $y=2$; $y=-1$.

611. Заполнить пропуски в тексте:

1) прямая $y=2x$ проходит через точку (...; 4);

2) прямая $y=3x-4$ отсекает на оси ординат от её начала отрезок длиной ...;

3) прямая $y=2x-6$ отсекает на оси абсцисс от её начала отрезок длиной ...;

4) среди прямых $y=x-7$, $y=5x+2$, $y=3x-7$, $y=x+4$, $y=-x-7$ параллельными являются ... .

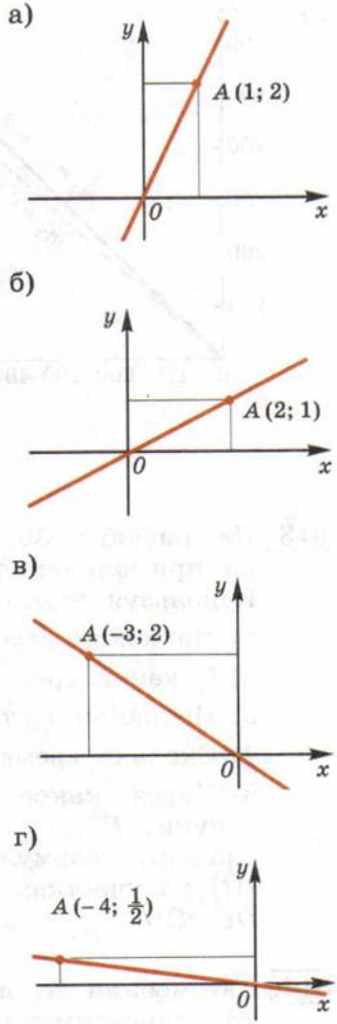
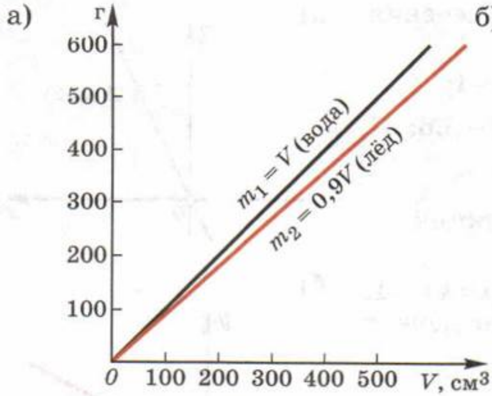


Рис. 35

612. Используя графики зависимостей массы m_1 воды и массы m_2 льда от объёма V (рис. 36, *а*), ответить на вопросы:

1) Является ли функция $m_1(V)$ линейной?

2) Какой объём занимают лёд и вода, если они имеют одинаковую массу, равную 500 г?



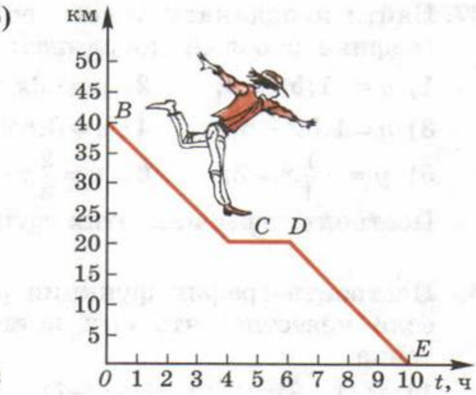


Рис. 36

613. На рисунке 36, *б* изображён график движения пешехода на прямолинейном участке пути из пункта B в пункт E. Используя этот график, ответить на вопросы:

1) На каком расстоянии от пункта E находится пункт B?

2) С какой средней скоростью двигался пешеход?

3) На каком расстоянии от пункта B он сделал привал?

4) Сколько времени длился привал?

5) Через какое время после привала пешеход прибыл в пункт E?

Записать формулой функцию $s(t)$ на участках графика BC, DE, CD.

614. Автомобили A_1 и A_2 выезжают одновременно навстречу друг другу. По заданным графикам движения автомобилей (рис. 37) найти:

1) время от начала движения автомобилей до их встречи;

2) путь, пройденный каждым из автомобилей до их встречи;

3) скорость движения каждого автомобиля.

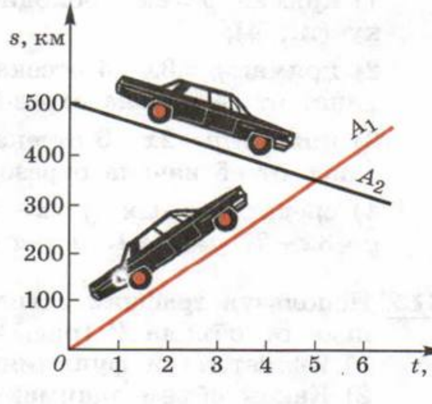


Рис. 37

ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Число городов в России с веками увеличивалось. В таблице представлена информация о числе городов к концу конкретного века. Сколько городов было в России к концу XIII в.? К концу какого века в России было 254 города?

Век	X	XI	XIII	XIV	XVII
Число городов	30	42	62	160	254

2. Валовой внутренний продукт (ВВП) означает рыночную стоимость всех конечных товаров и услуг, произведённых для потребления за год во всех отраслях экономики на территории государства. По таблице указать год с наибольшим ВВП; наименьшим ВВП.

Год	2006	2007	2008	2009
ВВП (трлн р.)	38	40	41	39

3. При движении по шоссе 1 л бензина расходуется на 15 км пути. В баке было 60 л бензина. Количество бензина y (в литрах), остающегося в баке, является функцией расстояния x (в километрах), пройденного автомобилем. Записать формулой зависимость y от x (действующую до опустошения бака). Какое наибольшее расстояние может проехать автомобиль на этом бензине?

4. На рисунке 38 даны три графика, отражающие демографическую ситуацию в нашей стране в разные годы (n). Как вы думаете, какой из графиков характеризует изменение численности населения (N) в каждый из следующих промежутков времени: 1935—1950 гг.; 1980—1995 гг.; 2001—2010 гг.? Ответ обосновать.

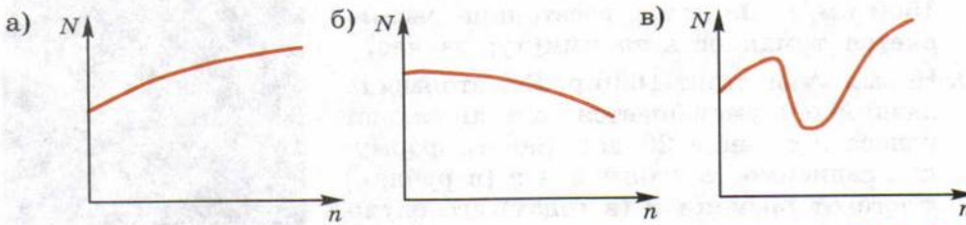


Рис. 38

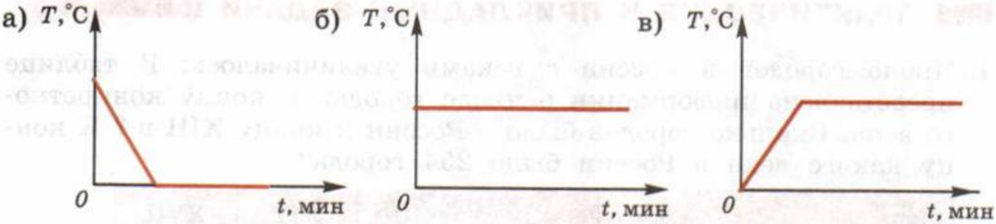


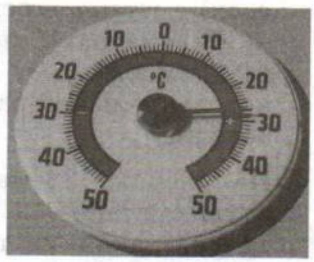
Рис. 39

5. Какой из трёх представленных на рисунке 39 графиков отражает процесс охлаждения с последующим замерзанием воды?

6. Одна из формул для вычисления идеального веса человека m (в килограммах) при данном росте l (в сантиметрах) выглядит следующим образом: $m = l - 100$. Найдите идеальный вес человека при росте 150 см; 160 см; 171 см.

7. Необходимое число часов сна для человека в возрасте до 18 лет вычисляется по формуле $y = 17 - 0{,}5x$, где x — возраст в годах, y — число часов сна. Найти:
1) значение y при $x = 12$; 2) значение x при $y = 15$.
Построить график зависимости y от x при $x \leqslant 18$.

8. Температура, измеренная по шкале Фаренгейта, может быть переведена в температуру по шкале Цельсия по формуле $y = \frac{5}{9}(x - 32)$, где x — температура в градусах шкалы Фаренгейта, y — температура в градусах шкалы Цельсия. Найти:
1) значение y при $x = 68$;
2) значение x, если $y = 5$.
Построить график зависимости y от x.



9. Крабовидная туманность в созвездии Тельца расширяется со скоростью 1500 км/с. На какое расстояние расширяется туманность за минуту; за час?

10. Новый утюг стоит 1680 р. Его стоимость равномерно уменьшается до нуля за счёт износа в течение 20 лет. Задать формулой зависимость стоимости y (в рублях) утюга от времени x (в годах) его службы. Найти:

1) стоимость утюга через 5 лет после его покупки;
2) число лет, прошедшее с момента покупки, когда стоимость утюга составила 840 р.

11. В течение 6 суток толщина льда в пруду увеличивалась равномерно на 5 мм в сутки. Записать формулой зависимость толщины льда y (в миллиметрах) от числа прошедших суток x, если к началу наблюдений она составляла 30 мм. Найти: 1) толщину льда через 2 суток; 2) число суток, по прошествии которых толщина льда была 55 мм.

В этой главе вы узнали,

что такое:

— абсцисса и ордината точки;
— независимая переменная;
— функция (зависимая переменная);
— функциональная зависимость;
— график функции;
— функция $y=kx$ и её график;
— прямая пропорциональность;
— линейная функция и её график;
— способы задания функции;

как:

— задавать функцию с помощью формулы; таблицы; графика;
— строить и читать график функции $y=kx$; $y=kx+b$;
— выяснять (без использования графика) принадлежность точки с известными координатами графику конкретной функции, заданной формулой;
— находить координаты точек пересечения графика линейной функции с осями координат.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

1. Дана функция $y=5x-1$. Найти $y(0{,}2)$ и значение x, при котором значение функции равно 89. Принадлежит ли точка $A(-11;\ 54)$ графику этой функции?

2. Построить график функции:
1) $y=2x$; 2) $y=x-2$; 3) $y=3$; 4) $y=3-4x$.

II уровень

3. График функции $y=kx-3$ проходит через точку $A(16; 3)$. Проходит ли график этой функции через точку $B(8; 1)$; $C(4; -1{,}5)$?
4. Функция $y=-\frac{1}{3}x+2$ пересекает оси координат в точках A и B. Найти площадь прямоугольного треугольника AOB, где O — начало координат.
5. Четыре оператора, работающие с одинаковой производительностью, могут набрать текст за 8 ч. За сколько часов могут набрать этот текст 2 оператора, работая с той же производительностью? 6 операторов?

III уровень

6. График функции $y=kx+b$ проходит через точки $(2; 7)$ и $(0; -3)$. Найти k и b.
7. График функции $y=kx-5$ проходит через точку $B(3; 1)$. Записать формулой линейную функцию, график которой проходит через точку $C(-2; -1)$ и параллелен графику данной функции.
8. Построить график движения пешехода из пункта A в пункт B, если первые 2 ч он шёл со скоростью 3 км/ч, затем 2 ч отдыхал, после чего ещё 2 ч до пункта B шёл со скоростью 4 км/ч. На каком расстоянии от пункта A был пешеход через 5 ч после начала движения?
9. Построить график функции $y=|x-4|+2$.

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. История возникновения понятия функции.
2. Достижения Рене Декарта в естественных науках.
3. История создания прямоугольной системы координат.
4. Леонард Эйлер и его вклад в развитие теории функций.
5. Научные интересы и гениальные открытия Н. И. Лобачевского.
6. Физические процессы, моделируемые линейной функцией.
7. Практическая работа (продолжительностью не менее месяца) по наблюдению за изменением: 1) температуры в городе (ежедневно в одно и то же время суток); 2) цен на определённые продукты; 3) атмосферного давления; 4) курса валют; 5) оценок по математике у конкретных учащихся и т. п. Представление собранных данных в виде таблиц и графиков. Нахождение средних значений совокупностей результатов наблюдений.

ГЛАВА VII

Системы двух уравнений с двумя неизвестными

Во II главе учебника в одном из *Диалогов об истории* вы познакомились с линейными уравнениями с двумя неизвестными. Чем же предстоит заниматься в этой главе, в заголовке которой фигурирует словосочетание «системы уравнений»?

С термином «система» вы встречались неоднократно в учебной и художественной литературе, на уроках и в повседневной жизни. Наверняка нередко использовали в разговорах само это слово и однокоренные с ним слова «систематический» и «системный».

Вы знаете, например, что такое прямоугольная *система* координат, Солнечная *система*, десятичная *система* счисления, периодическая *система* химических элементов Менделеева, правоохранительная *система*, *систематические* занятия спортом и многое другое. В энциклопедическом словаре можно прочитать: «*Система* (от греческого слова σύστημα — целое, составленное из частей) — это множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, образующих целостность, единство». Подумайте, в чём заключается целостность и единство элементов систем, которые мы перечислили.

В математике для обозначения систем используют специальный знак — фигурную скобку, которая показывает, что должны выполняться требования каждой строчки, охваченной этим знаком. Например, система

$$\begin{cases}(x-4)(2x+1)=0,\\ x \text{ — натуральное число}\end{cases}$$

имеет единственное значение $x=4$, которое удовлетворяет как первому, так и второму требованию системы. А для системы

$$\begin{cases}x-3=0,\\ (x+7)(x-2)=0\end{cases}$$

не существует значений x, обращающих в верные равенства оба её уравнения. Про такую систему говорят, что она не имеет решений.

Можно найти много пар чисел x и y, обращающих в верное равенство первое уравнение системы $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 2x + y = 5 \end{cases}$, но не обращающих в верное равенство второе уравнение (например, $x=8$ и $y=10$); такие пары не являются решениями всей системы. А вот пара чисел $x=2$ и $y=1$ обращает в верные равенства оба уравнения и поэтому является **решением системы**.

В данной главе вы научитесь решать разными способами системы линейных уравнений с двумя неизвестными. Научитесь с помощью графиков уравнений быстро определять: какая система имеет единственное решение, какая не имеет решений, а какая имеет бесконечно много решений.

§ 33 Уравнения первой степени с двумя неизвестными. Системы уравнений

В этом параграфе вы встретитесь с уравнениями первой степени с двумя неизвестными и познакомитесь с системами таких уравнений. Узнаете, что называют решением системы уравнений с двумя неизвестными и что значит решить систему уравнений.

Нужно вспомнить:

- свойства уравнений;
- понятие корня уравнения с одним неизвестным;
- что значит решить уравнение с одним неизвестным.

Задача 1. Проволока длиной 41 см разрезана на куски длиной по 13 см и 5 см. Сколько получилось кусков каждого вида?

► Введём обозначения:
x — число кусков по 13 см, y — число кусков по 5 см.
По условию задачи выполняется равенство

$$13x + 5y = 41, \tag{1}$$

в котором x и y — неизвестные целые неотрицательные числа. Из этого уравнения выразим x через y, получим $x = 3\frac{2}{13} - \frac{5}{13}y$.

Так как из числа $3\frac{2}{13}$ вычитается неотрицательное число $\frac{5}{13}y$, то x не может быть больше, чем $3\frac{2}{13}$, а так как x — целое неотрицательное число, то оно может быть только одним из чисел 0, 1, 2, 3. Теперь из уравнения (1) выразим y через x, получим $y=\frac{41-13x}{5}$.

Вычисляя по этой формуле значения y при $x=0, 1, 2, 3$, замечаем, что только при $x=2$ соответствующее значение y будет целым числом (равным 3).

Ответ. 2 куска длиной 13 см и 3 куска длиной 5 см. ◁

Помимо найденных целочисленных значений x и y в задаче 1 уравнению (1) удовлетворяет не одна пара чисел. Например, пары $x_1=1$, $y_1=5\frac{3}{5}$ и $x_2=-\frac{2}{13}$, $y_2=8\frac{3}{5}$ также обращают уравнение (1) в верное равенство. Уравнение (1) является примером уравнения первой степени с двумя неизвестными.

! Определение. **Уравнением первой степени с двумя неизвестными x и y** называется уравнение вида

$$ax+by=c, \tag{2}$$

в котором a, b, c — заданные числа, причём хотя бы одно из чисел a и b не равно нулю, т. е. $a^2+b^2\neq 0$.

В уравнении (2) числа a и b называют **коэффициентами** при неизвестных x и y, а число c — **свободным членом.**

Уравнения вида $ax+by=c$ часто называют **линейными уравнениями с двумя неизвестными.** При решении задачи 1 была найдена пара чисел $x=2$, $y=3$, при которых уравнение $13x+5y=41$ обращается в верное числовое равенство $13\cdot 2+5\cdot 3=41$. Эта пара чисел называется **решением** данного **уравнения.** Часто решение уравнения с двумя неизвестными записывается в виде пары чисел в круглых скобках. Например, вместо того чтобы писать $x=2$, $y=3$, пишут (2; 3). Важен порядок расположения чисел в скобках: на первом месте указывается значение x, а на втором — значение y. Поэтому записанные таким образом пары чисел называют **упорядоченными.**

! Определение. **Решением уравнения с двумя неизвестными x и y** называется упорядоченная пара чисел $(x; y)$, при подстановке которых в это уравнение получается верное числовое равенство.

Задача 2. Записать все решения уравнения $3x-4y=12$.

► Если равенство $3x-4y=12$ является верным, то верными являются равенства $4y=3x-12$ и $y=\frac{3x-12}{4}$, а поэтому верно равенство $3x-4\cdot\frac{3x-12}{4}=12$. Пары чисел $\left(x;\ \frac{3x-12}{4}\right)$, где x может принимать любое значение, являются решениями уравнения $3x-4y=12$.

Ответ. $\left(x;\ \frac{3x-12}{4}\right)$, где x — любое число. ◁

При решении уравнения в задаче 2 найдены все решения — это пары чисел $\left(x;\ \frac{3x-12}{4}\right)$, где x — любое число. Их бесконечно много: задавая различные значения x, получаем соответствующие им значения y. Например, если $x=0$, то $y=-3$, если $x=-1$, то $y=-3{,}75$. Решениями уравнения $ax+by=c$, в случае когда $b\neq0$, являются пары $\left(x;\ \frac{c-ax}{b}\right)$, где x — любое число.

Решениями уравнения $ax+0\cdot y=c$ с двумя неизвестными x и y, где $a\neq0$, являются пары чисел $\left(\frac{c}{a};\ y\right)$, где y — любое число.

Задача 3. Ученик задумал два числа и сказал, что сумма этих чисел равна 10, а их разность равна 4. Можно ли по этим данным узнать, какие числа задумал ученик?

► Обозначим первое искомое число буквой x, второе — буквой y. По условию задачи $x+y=10$, $x-y=4$.
Если оба равенства верные, то их можно сложить (т. е. сложить левые и правые части равенств).
Получим также верное равенство $(x+y)+(x-y)=10+4$, откуда $2x=14$, $x=7$. Теперь вычтем из первого равенства второе: $(x+y)-(x-y)=10-4$. Получим $2y=6$, $y=3$.

Ответ. Можно: 7 и 3. ◁

Так как в этих уравнениях неизвестные числа одни и те же, то эти уравнения рассматривают **совместно** и говорят, что они образуют **систему двух уравнений**, которую записывают так:

$$\begin{cases} x+y=10, \\ x-y=4. \end{cases} \qquad (3)$$

Фигурная скобка, стоящая слева, показывает, что нужно найти такую пару чисел $(x;\ y)$, которая обращает каждое уравнение в верное равенство. Система уравнений (3) — пример **системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными**. Рассмотрим ещё один пример системы уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+y) = 3x + 2y, \\ 5x + 3y = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Можно проверить, что два числа $x = 3$ и $y = -5$ обращают каждое из уравнений системы (4) в верное равенство:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(3-5) = 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-5), \\ 5 \cdot 3 + 3 \cdot (-5) = 0. \end{cases}$$

Пару чисел (3; –5) называют решением системы (4).

Определение. **Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными** называют такую **пару чисел** x и y, которые при подстановке в эту систему обращают каждое её уравнение в верное равенство.

Решить систему уравнений — это значит найти все её решения или установить, что их нет.

В общем виде систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными записывают так:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — заданные числа, а x и y — неизвестные.

Например, в системе (3) $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $c_1 = 10$, $a_2 = 1$, $b_2 = -1$, $c_2 = 4$.

Устные вопросы и задания

1. Что называют уравнением первой степени (линейным уравнением) с двумя неизвестными?
2. Что называют решением линейного уравнения с двумя неизвестными?
3. Что называют решением системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными?
4. Что значит решить систему уравнений?

Вводные упражнения

1. Убедиться в том, что число –2 является корнем уравнения:
   1) $7x + 4 = -10$; 2) $-3x - 5 = 2x + 5$.

2. Решить уравнение:
1) $-5x+1=3x+2$; 2) $8x-6=3x+2$.

3. Из формулы:
1) $S=2a+3b$ выразить a; 2) $y=4x-3$ выразить x.

4. Среди уравнений: $3x-7=1$; $4x+6=12$; $\frac{3}{2}x-3=0$; $5-0{,}5x=4$ выбрать те, которые имеют одинаковые корни.

5. Установить, при каких значениях a уравнение $ax=0$ имеет:
1) один корень; 2) бесконечно много корней.

6. Установить, при каких значениях a уравнение $ax=7$:
1) имеет один корень; 2) не имеет корней.

Упражнения

615. Дано линейное уравнение с двумя неизвестными x и y. Выразить сначала x через y, а затем y через x:
1) $x+2y=5$; 2) $3x-y=-2$; 3) $5x-3y=6$; 4) $2x+7y=3$.

616. Записать все решения уравнения:
1) $3x+4y=8$; 2) $-x+3y=2$;
3) $1{,}5x-0{,}5y=3{,}5$; 4) $2x-3y=\frac{2}{3}$.

617. Найти все пары $(x;\ y)$ натуральных чисел, которые являются решениями уравнения:
1) $5x+6y=28$; 2) $13x+4y=55$;
3) $3x+2y=13$; 4) $5x+7y=59$.

618. (Устно.) Проверить, что числа $x=4$, $y=3$ являются решением системы $\begin{cases}2{,}5x-3y=1,\\5x-6y=2.\end{cases}$

619. Дана система уравнений $\begin{cases}4x+3y=6,\\2x+y=4.\end{cases}$ Из следующих пар чисел выбрать ту, которая является решением данной системы:
1) $x=0$, $y=2$; 2) $x=3$, $y=-2$.

620. Дана система уравнений $\begin{cases}\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=-1,\\\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=5.\end{cases}$ Из следующих пар чисел выбрать ту, которая является решением данной системы:
1) $x=10$, $y=0$; 2) $x=6$, $y=-6$.

621. Найти все пары $(x;\ y)$ натуральных чисел, которые являются решениями уравнения:

1) $15y - 8x = 76$; 2) $9y - 2x = 20$;
3) $5y - 3x = 26$; 4) $4y - 3x = 20$.

622. Дана система уравнений $\begin{cases} x - 3y = c_1, \\ 2x + 4y = c_2. \end{cases}$

Известно, что пара чисел $x = 5$, $y = 2$ является её решением. Найти c_1 и c_2.

623. Дана система уравнении $\begin{cases} ax - 3y = 11, \\ 11x + by = 29. \end{cases}$

Известно, что пара чисел $x = 1$, $y = -2$ является её решением. Найти a и b.

624. Можно ли загрузить автомашину контейнерами грузоподъёмностью 0,8 т и 0,9 т так, чтобы полностью использовать грузоподъёмность автомашины, равную 10 т?

625. Детали упакованы в коробки двух видов: по 5 штук и по 8 штук. Всего упаковано 69 деталей. Сколько понадобилось коробок каждого вида?

Шаг вперёд

Ещё раз о диофантовых уравнениях

Помните, во II главе я начал вам рассказывать о решении неопределённых уравнений с двумя неизвестными вида $ax + by = c$, которые Диофант в III в. решал в целых числах.

Помним. И в его честь эти уравнения получили название диофантовых.

Хочу, во-первых, чтобы вы знали, что и по сей день ещё нет общих методов решения таких уравнений (может быть, когда-нибудь их найдёте вы). Во-вторых, хочу, чтобы вы не забывали, что хотя диофантовы уравнения чаще всего имеют бесконечно много решений, но ряд практических задач, сводимых к диофантовым уравнениям, по разным причинам имеет либо ограниченное число решений, либо единственное решение.

Общие методы решения уравнений мы пока, наверное, не сможем найти, но интересные задачи порешаем с удовольствием.

Тогда я покажу вам решение задачи, в которой ограничения на значения неизвестных накладываются из-за того, что цифр всего десять.

Найдите двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

► Пусть a — первая цифра, b — вторая цифра. По условию

$$a = \overline{ab} - \overline{ba} \quad \text{или} \quad a = (10a + b) - (10b + a),$$

$$a = 10a + b - 10b - a; \; a = 9a - 9b; \; 9b = 8a, \; b = \frac{8}{9}a.$$

Полученное уравнение имеет бесконечное множество решений среди целых чисел (достаточно в качестве a взять числа, делящиеся нацело на 9). Однако предложенная задача имеет единственное решение, так как по условию задачи числа a и b однозначные (они являются цифрами в двузначном числе). Решение очевидно: $a = 9$; $b = 8$. Искомое число 98. ◁

Для самостоятельной работы предлагаю следующую задачу.

В комнате было несколько стульев на четырёх ножках и табуреток на трёх ножках. После того как их все заняли, оказалось, что ног у сидящих людей вместе с ножками у всех стульев и табуреток 49. Сколько было стульев и табуреток?

§ 34 Способ подстановки

В этом параграфе вы познакомитесь с одним из основных способов решения систем уравнений — способом подстановки. На практике способ подстановки применяется чаще всего в тех случаях, когда в одном из уравнений системы коэффициент при каком-либо неизвестном равен 1, в связи с чем это неизвестное легко выражается через другое неизвестное.

Нужно вспомнить:

- понятие решения системы уравнений с двумя неизвестными;
- свойства уравнений и верных числовых равенств;
- запись всех решений линейного уравнения с двумя неизвестными;
- умножение многочлена на одночлен.

Задача 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x + y = 4. \end{cases}$$

▶ Предположим, что x и y — это такие числа, при которых оба равенства системы являются верными, т. е. $(x; y)$ — решение системы. Перенесём $2x$ из левой части верного равенства $2x + y = 4$ в правую часть; получим также верное равенство: $y = 4 - 2x$.

Теперь рассмотрим первое уравнение системы: $x + 2y = 5$.

Напомним, что по предположению x и y — такие числа, что это равенство является верным. Заменим в этом равенстве число y равным ему числом $4 - 2x$, т. е. подставим вместо y его значение $4 - 2x$. Получим $x + 2(4 - 2x) = 5$. Из этого равенства находим $x + 8 - 4x = 5$, $-3x = -3$, $x = 1$. Подставляя $x = 1$ в равенство $y = 4 - 2x$, получаем $y = 4 - 2 \cdot 1 = 2$.

Подведём итог проделанных рассуждений. Предположив, что система имеет решение, мы получили, что $x = 1$, $y = 2$ и других решений нет.

Осталось убедиться, что эта пара чисел на самом деле является решением системы, т. е. осталось показать, что при $x = 1$, $y = 2$ оба уравнения системы становятся верными равенствами. Подставим найденные значения x и y в оба уравнения системы и выполним вычисления:

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 2 = 5, \\ 2 \cdot 1 + 2 = 4. \end{cases}$$

Оба равенства верные. Система имеет единственное решение: $x = 1$, $y = 2$. ◁

Рассмотренный способ решения системы называется **способом подстановки.** Он заключается в следующем:

1) из одного уравнения системы (все равно из какого) выразить одно неизвестное через другое, например y через x;
2) полученное выражение подставить в другое уравнение системы, получится одно уравнение с одним неизвестным x;
3) решив это уравнение, найти значение x;
4) подставив найденное значение x в выражение для y, найти значение y.

Задача 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x - 2y = 16, \\ 5x + 3y = -5. \end{cases}$

▶ 1) Из первого уравнения находим

$$-2y = 16 - 3x, \quad y = \frac{16 - 3x}{-2}, \text{ т. е. } y = -8 + \frac{3}{2}x.$$

2) Подставляем $y=-8+\frac{3}{2}x$ во второе уравнение системы:

$$5x+3\left(-8+\frac{3}{2}x\right)=-5.$$

3) Решаем это уравнение: $5x-24+\frac{9}{2}x=-5$, $\frac{19}{2}x=19$, $x=2$.

4) Подставляя $x=2$ в $y=-8+\frac{3}{2}x$, находим: $y=-8+\frac{3}{2}\cdot 2=-5$.

Ответ. $x=2$, $y=-5$. ◁

Задача 3. Решить систему уравнений $\begin{cases}\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=2,\\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=-3.\end{cases}$

► Упростим уравнения системы:

$$\begin{cases}x+2y=12,\\ 2x-3y=-18.\end{cases}$$

1) Из первого уравнения системы находим: $x=12-2y$.

2) Подставляем $x=12-2y$ во второе уравнение системы:

$$2(12-2y)-3y=-18.$$

3) Решаем это уравнение: $24-4y-3y=-18$, $7y=42$, $y=6$.

4) Подставляя $y=6$ в равенство $x=12-2y$, находим:

$$x=12-2\cdot 6=0.$$

Ответ. (0; 6). ◁

Устные вопросы и задания

1. Сформулировать алгоритм решения системы уравнений способом подстановки.
2. Из какого уравнения системы двух линейных уравнений предпочтительнее выражать одно неизвестное через другое, чтобы решить систему способом подстановки?

Вводные упражнения

1. Какая из пар чисел (–1; 3), (–2; 3) является решением уравнения $6x+5y=3$?
2. Какая из пар чисел (1; –5), (–1; –2), (–2; 3) является решением системы

$$\begin{cases}8x+3y=-7,\\ 5x+y=-7?\end{cases}$$

3. Записать все решения уравнения: 1) $-x+5y=3$; 2) $6x-y=2$.

Упражнения

626. В каждом из уравнений выразить одно неизвестное через другое:

1) $x + y = 7$; 2) $x - y = 10$; 3) $2x - y = 5$;
4) $x + 3y = 11$; 5) $2x + 3y = 7$; 6) $5y - 3x = 3$.

Решить систему уравнений **(627—632)**.

627. 1) $\begin{cases} x = 2 + y, \\ 3x - 2y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + y = 4, \\ x = 3 + 2y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 11 - 2x, \\ 5x - 4y = 8; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - 2y = 11, \\ y = 2x - 5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y = 2 - 4x, \\ 8x = 5 - 3y; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x - 5y = 8, \\ x = -y. \end{cases}$

628. 1) $\begin{cases} x + 5y = 7, \\ 3x - 2y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 3y = 17, \\ x - 2y = -13; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + 12y = 11, \\ 5x - 3y = 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y - 3x = 5, \\ 5x + 2y = 23; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x - 2y = 0, \\ 3x - 2y = 5; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x = 5y, \\ -3x + 8y = -13. \end{cases}$

629. 1) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3, \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{8}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{5x}{2} + \frac{y}{5} = -4, \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{6} = \frac{1}{6}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \frac{2x}{3} - \frac{5y}{4} = -3, \\ \frac{5x}{6} + \frac{7y}{8} = 6. \end{cases}$

630. 1) $\begin{cases} 3(x - y) + 5x = 2(3x - 2), \\ 4x - 2(x + y) = 4 - 3y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2 - 5(0{,}2y - 2x) = 3(3x + 2) + 2y, \\ 4(x - 2y) - (2x + y) = 2 - 2(2x + y); \end{cases}$

3) $\begin{cases} 10 + 5(x - 5y) = 6(x - 4y), \\ 2x + 3(y + 5) = -5 - 2(y - 2x); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3(y - 2x) - (5y + 2) = 5(1 - x), \\ 7 - 6(x + y) = 2(3 - 2x) + y. \end{cases}$

631. 1) $\begin{cases} \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{3} = 8, \\ \frac{x + y}{3} + \frac{x - y}{4} = 11; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x + y}{9} - \frac{x - y}{3} = 2, \\ \frac{2x - y}{6} - \frac{3x + 2y}{3} = -20; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{7x - 2y}{2} + 2x = 6, \\ \frac{5y - 8x}{3} - y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{1}{2}(2x - y) - 1 = y - 2, \\ \frac{1}{4}(3x - 7) = \frac{1}{5}(2y - 3) + 1. \end{cases}$

632. 1) $\begin{cases} 2x + y - 8 = 0, \\ 3x + 4y - 7 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 4y - 2 = 0, \\ 5y - x - 6 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{7y - x}{3} = -2, \\ \dfrac{x + 14y}{3} = 4{,}5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{7x - y}{2} = -3, \\ \dfrac{-8x + 5y}{2} = 3{,}5; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{y - 3x}{2} = 1 - \dfrac{7x + 3y}{5}, \\ \dfrac{x + 5y}{3} = 1 + \dfrac{x + 3y}{4}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dfrac{2x - 5y}{7} - 1 = \dfrac{2x + 2y}{3}, \\ \dfrac{x - 3y}{4} + 2 = \dfrac{7x - 8y}{5}. \end{cases}$

Шаг вперёд

Задачи с параметрами

Хочу обратить ваше внимание на те случаи, когда система уравнений не имеет решений. Это происходит, когда уравнения системы не имеют общих решений или когда хотя бы одно из её уравнений не имеет решений. Вы уже знаете, что линейное уравнение вида $0 \cdot x = b$, где $b \neq 0$, не имеет корней, так как при умножении на 0 произведение всегда равно нулю. И если хотя бы одно из уравнений системы будет иметь такой вид, очевидно, что и вся система не будет иметь решений.

А мой брат часто решает похожие *задачи с параметрами*. Говорит, что они самые трудные, но на них проверяется знание всех тонкостей теории.

Твой брат прав. Он готовится к итоговой аттестации и делает это серьёзно, вот и решает самые трудные задачи. Рассмотрим одну из таких задач.

При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ (a - 3)x = 7 \end{cases}$$

не имеет решений? Неизвестные здесь обозначены буквами x и y.

При $a \neq 3$ из второго уравнения находим $x = \dfrac{7}{a - 3}$. Подставив его в первое уравнение, найдём $y = \dfrac{17 - a}{5(a - 3)}$. Значит, при любом $a \neq 3$ система имеет решение $\left(\dfrac{7}{a - 3}; \dfrac{17 - a}{5(a - 3)}\right)$.

При $a = 3$ второе уравнение системы не имеет решений. То есть система не имеет решений при $a = 3$.

Ты абсолютно прав, Тёма. Думаю, что вы теперь захотите попробовать решать и более сложные задачи с параметрами. Нужно только знать: если в задаче с параметрами не ставится частный вопрос, а просят просто решить уравнение или систему, то нужно рассматривать все возможные случаи, искать все значения параметра или параметров, при которых уравнение или система уравнений имеет единственное решение, несколько решений, бесконечно много решений или не имеет решений.

§ 35 Способ сложения

В тех случаях, когда в обоих линейных уравнениях системы при каком-либо из неизвестных коэффициентами являются противоположные числа, удобно применять способ почленного сложения уравнений. Этот способ, называемый способом алгебраического сложения, и будет рассмотрен в данном параграфе.

Нужно вспомнить:

- свойства уравнений;
- приведение подобных членов;
- решение линейных уравнений с одним неизвестным;
- действия с многочленами.

Задача 1. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 7x - 2y = 27, \\ 5x + 2y = 33. \end{cases}$

► Предположим, что x и y — это такие числа, при которых оба равенства системы верны, т. е. $(x;\ y)$ — решение системы. Сложим эти равенства. Тогда снова получим верное равенство, так как к равным числам прибавляются равные числа:

$$+\begin{array}{r} 7x - 2y = 27 \\ 5x + 2y = 33 \\ \hline 12x = 60, \end{array}$$

откуда $x = 5$.

Теперь подставим $x = 5$ в одно из уравнений системы, например в первое: $7 \cdot 5 - 2y = 27$. Из этого равенства находим $35 - 2y = 27$, $-2y = -8$, $y = 4$. Итак, если система имеет решение, то этим решением может быть только пара чисел: $x=5$, $y=4$. Теперь нужно убедиться в том, что $x=5$, $y=4$ в самом деле являются решением системы:

$$\begin{cases} 7\cdot 5-2\cdot 4=27, \\ 5\cdot 5+2\cdot 4=33. \end{cases}$$

Оба равенства верные.

Ответ. Система имеет единственное решение: $x=5$, $y=4$. ◁

Рассмотренный способ решения системы уравнений называется **способом алгебраического сложения**, так как для исключения одного из неизвестных выполняется почленное сложение или вычитание левых и правых частей уравнений системы.

Задача 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 5x+3y=29, \\ 5x-4y=8. \end{cases}$

► Вычтем из первого уравнения второе:

$$\begin{array}{r} _{-}5x+3y=29 \\ 5x-4y=8 \\ \hline 7y=21, \end{array}$$

откуда $y=3$. Подставим $y=3$ в первое уравнение системы: $5x+3\cdot 3=29$. Решая это уравнение, находим $5x+9=29$, $5x=20$, $x=4$.

Ответ. $x=4$, $y=3$. ◁

Из рассмотренных примеров видно, что способ алгебраического сложения оказывается удобным для решения системы в том случае, когда у обоих линейных уравнений коэффициенты при каком-нибудь неизвестном одинаковы или отличаются только знаком. Если это не так, то можно уравнять модули коэффициентов при каком-нибудь одном из неизвестных, умножая левую и правую части каждого уравнения на подходящие числа.

Задача 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x+2y=10, \\ 5x+3y=12. \end{cases}$

► Обе части первого уравнения системы умножим на 3, а второго — на 2 и вычтем из второго уравнения полученной системы первое:

$$\begin{cases} 3x+2y=10 \\ 5x+3y=12 \end{cases}\begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{r} _{-}10x+6y=24 \\ 9x+6y=30 \\ \hline x=-6 \end{array}$$

Подставив найденное значение $x=-6$ в первое уравнение данной системы, получим $-18+2y=10$, $2y=28$, $y=14$.

Ответ. $x=-6$, $y=14$. ◁

Итак, для решения системы линейных уравнений способом алгебраического сложения нужно:

1) уравнять модули коэффициентов при одном из неизвестных;
2) складывая или вычитая полученные уравнения, найти одно неизвестное;
3) подставляя найденное значение неизвестного в одно из уравнений исходной системы, найти второе неизвестное.

Задача 4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x-3y=14, \\ x+2y=-2. \end{cases}$

► 1) Оставляя первое уравнение без изменений, умножим второе уравнение на 4:

$$\begin{cases} 4x-3y=14, \\ 4x+8y=-8. \end{cases}$$

2) Вычитая из второго уравнения полученной системы первое уравнение, находим $11y=-22$, откуда $y=-2$.

3) Подставляя $y=-2$ во второе уравнение исходной системы, находим $x+2\cdot(-2)=-2$, откуда $x=2$.

Ответ. $x=2$, $y=-2$. ◁

Устные вопросы и задания

1. Сформулировать алгоритм решения системы линейных уравнений способом алгебраического сложения.
2. Какую из данных систем:

1) $\begin{cases} 5x-3y=1, \\ 6x+3y=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -4x+3y=5, \\ x-2y=1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 45x-30y=29, \\ 29x-30y=15 \end{cases}$

удобно решать способом сложения? Ответ обосновать.

Вводные упражнения

1. Привести подобные члены:

1) $3y-2x+6y+2x$; 2) $-5x+4y+5x-6y$.

2. Решить уравнение: 1) $7x-2=3x+8$; 2) $4y+6=9y-4$.
3. Привести к многочлену стандартного вида произведение:

1) $(x-6)(x+4)$; 2) $(2x+1)(x-5)$; 3) $(x-2)(3x-8)$.

Упражнения

Способом алгебраического сложения решить систему уравнений **(633—640)**.

633. 1) $\begin{cases} 2x + y = 11, \\ 3x - y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x - 2y = 6, \\ 7x + 2y = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 7y = 40, \\ -4x + 9y = 24; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 3y = 17, \\ 2y - x = 13. \end{cases}$

634. 1) $\begin{cases} 4x + 3y = -15, \\ 5x + 3y = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ 4x - 5y = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 5y = 3, \\ x + 4y = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2y - 3x = 6, \\ y - 3x = 9. \end{cases}$

635. 1) $\begin{cases} 4x + 3y = -4, \\ 6x + 5y = -7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 5y = -22, \\ 3x + 2y = 18; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x + 6y = 0, \\ 3x + 4y = 4. \end{cases}$

636. 1) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1, \\ \frac{x}{4} + \frac{2y}{3} = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 2, \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + \frac{x - y}{4} = 11, \\ 3y - \frac{x + y}{3} = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x - \frac{x - y}{5} = 11, \\ 2y - \frac{x + y}{3} = 11. \end{cases}$

637. 1) $\begin{cases} x + 5y - 7 = 0, \\ x - 3y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 3y - 4 = 0, \\ 5x + 3y + 1 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 36x + 33y + 3 = 0, \\ 12x - 13y + 25 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 7x - 3y + 1 = 0, \\ 4x - 5y + 17 = 0. \end{cases}$

638. 1) $\begin{cases} 5(x + 1) = 2y + 6, \\ 3(x - 1) = 3y - 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1 - 3y = 2(x - 2), \\ 1 - 3x = 3y - 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4(x - 2) - 3(y + 3) = 1, \\ 3(x + 2) - 2(x - y) = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 7(2x + y) - 5(3x + y) = 6, \\ 3(x + 2y) - 2(x + 3y) = -6. \end{cases}$

639. 1) $\begin{cases} \frac{x + 3}{2} - \frac{y - 2}{3} = 2, \\ \frac{x - 1}{4} + \frac{y + 1}{3} = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{3} = 6, \\ \frac{x + y}{4} - \frac{x - y}{3} = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \frac{x + y}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{5}{2}, \\ \frac{3x}{2} + 2y = 0. \end{cases}$

640. 1) $\begin{cases}(x+3)(y+5)=(x+1)(y+8),\\(2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1);\end{cases}$

2) $\begin{cases}(x+5)(y-2)=(x+2)(y-1),\\(x-4)(y+7)=(x-3)(y+4);\end{cases}$

3) $\begin{cases}(x+4)(6-y)=(x+2)(9-y),\\(2x-1)(12-5y)=2(5x-1)(2-y).\end{cases}$

Разговор о важном

Замена обозначения

Предлагаю пролистать учебник на несколько страниц вперёд и посмотреть упражнение 684. Что вы можете сказать об этих системах?

Мне кажется, что они случайно попали в эту главу, так как среди них нет ни одной системы с линейными уравнениями. Ни одну из них я пока не смогу решить.

Но почему-то это упражнение поместили именно в эту главу! Посмотрите повнимательнее на знаменатели дробей, например, в упражнении 684, 3). Ничего не замечаете?

$$\begin{cases}\dfrac{3}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=4,\\[2mm]\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{15}{x-y}=4.\end{cases}$$

Замечаю, что фигурируют два знаменателя: $x+y$ и $x-y$. Но это не поможет мне решить систему.

А можно сказать, что в уравнениях фигурируют два множителя $\dfrac{1}{x+y}$ и $\dfrac{1}{x-y}$?

Да, но что это меняет? Могу лишь добавить, что раз $x+y$ и $x-y$ стоят в знаменателях дробей, то эти выражения не могут принимать значения, равные нулю.

Верное замечание. И если нам удастся найти x и y, обязательно проверим выполнение условий $x+y\neq 0$ и $x-y\neq 0$. Не буду вас мучить и сделаю подсказку: если *временно обозначить новыми буквами* (кроме x и y) встречающиеся в обоих уравнениях дроби, то эти уравнения упростятся. Обозначим $\dfrac{1}{x+y}=a$, $\dfrac{1}{x-y}=b$. Кстати, такой приём математики называют *заменой обозначения*.

Теперь относительно a и b наша система примет вид системы линейных уравнений! Запишем её:

$$\begin{cases} 3a + 5b = 4, \\ a + 15b = 4. \end{cases}$$

Такую систему я могу быстро решить способом подстановки (выразив a из второго уравнения): $a = 1$, $b = \frac{1}{5}$.

Итак, нам удалось найти, что $\frac{1}{x+y} = 1$, $\frac{1}{x-y} = \frac{1}{5}$. Очевидно, тогда $x + y = 1$, а $x - y = 5$. Вспоминая Светино замечание, убедимся, что $x + y \neq 0$ и $x - y \neq 0$. Но так как и в исходном уравнении, и в новых обозначениях речь шла об одних и тех же x и y, то, чтобы их найти, нужно решить систему

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

Эта система решается устно способом сложения. Получаем $x = 3$, $y = -2$.

Думаю, теперь не составит труда решить остальные задачи из упражнения 684.

§ 36 Графический способ решения систем уравнений

Графический способ решения систем уравнений является иллюстративным, вспомогательным к ранее освоенным вами способам подстановки и сложения. Этот способ либо даёт приближённые значения решений системы, либо помогает определить, сколько решений имеет система. С этим способом вы и познакомитесь в данном параграфе.

Нужно вспомнить:

- нахождение координат точек на координатной плоскости;
- построение точек по заданным координатам;
- построение графика линейной функции;
- понятие параллельных прямых;
- взаимное расположение двух прямых на плоскости;
- решение систем линейных уравнений с двумя неизвестными способами подстановки и алгебраического сложения.

Геометрической иллюстрацией уравнения с двумя неизвестными служит его график на координатной плоскости.

Рассмотрим уравнение

$$x - y = -1. \qquad (1)$$

Выразим из этого уравнения y через x:

$$y = x + 1. \qquad (2)$$

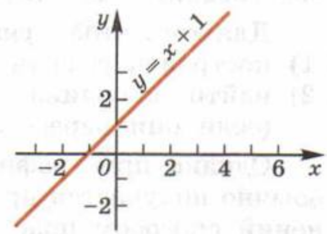


Рис. 40

Уравнение (2) можно рассматривать как формулу, задающую функцию y от x. Поэтому графиком уравнения (2) является прямая. Так как уравнения (1) и (2) выражают одну и ту же зависимость между x и y, то графиком уравнения (1) является эта же прямая.

Для построения прямой достаточно найти какие-нибудь две точки. Например, из уравнения (2) находим: если $x = 0$, то $y = 1$; если $x = -1$, то $y = 0$. Таким образом, графиком уравнения (1) является прямая, проходящая через точки (0; 1) и (–1; 0) (рис. 40).

Можно показать, что графиком любого уравнения вида $ax + by = c$ является прямая, если хотя бы одно из чисел a или b не равно нулю.

В той же координатной плоскости, на которой построен график уравнения (1), построим график уравнения

$$2x + y = 4. \qquad (3)$$

Из этого уравнения находим: если $x = 0$, то $y = 4$; если $y = 0$, то $x = 2$. Следовательно, графиком уравнения (3) является прямая, проходящая через точки (0; 4) и (2; 0) (рис. 41).

Найдём координаты точки пересечения построенных прямых, не используя графики. Так как координаты $(x; y)$ этой точки удовлетворяют уравнениям (1) и (3), т. е. обращают эти уравнения в верные числовые равенства, то пара чисел $(x; y)$ должна быть решением системы

$$\begin{cases} x - y = -1, \\ 2x + y = 4. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x = 1$, $y = 2$.

Итак, прямые $x - y = -1$ и $2x + y = 4$ пересекаются в точке (1; 2).

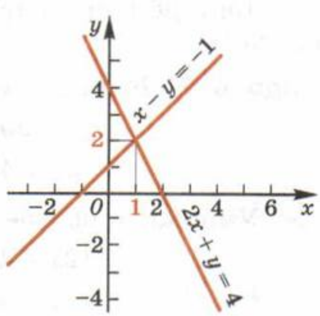


Рис. 41

Координаты точки пересечения прямых $x - y = -1$ и $2x + y = 4$ можно было найти с помощью графика (рис. 41). В таком случае говорят, что эта система **решена графически**.

Для того чтобы решить графически систему уравнений, нужно:
1) построить графики каждого из уравнений системы;
2) найти координаты точки пересечения построенных прямых (если они пересекаются).

Однако при графическом способе решения системы уравнений обычно получается приближённое решение. Решение системы уравнений способом подстановки или способом сложения даёт точные значения координат точки пересечения.

Задача 1. Найти координаты точки пересечения прямых

$$7x - 6y = 0 \text{ и } 21x + 2y = 10.$$

► Решим систему $\begin{cases} 7x - 6y = 0, \\ 21x + 2y = 10. \end{cases} \Big| \, 3$ $\quad + \begin{array}{r} 7x - 6y = 0 \\ 63x + 6y = 30 \\ \hline 70x = 30, \end{array}$

$$x = \frac{3}{7}; \quad 7 \cdot \frac{3}{7} - 6y = 0, \quad y = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\left(\frac{3}{7}; \frac{1}{2}\right)$. ◁

На плоскости возможны три случая взаимного расположения двух прямых — графиков уравнений системы.
1) Прямые пересекаются, т. е. имеют одну общую точку. Тогда система уравнений имеет единственное решение (рис. 41).
2) Прямые параллельны, т. е. не имеют общих точек. Тогда система уравнений не имеет решений.
3) Прямые совпадают. Тогда система уравнений имеет бесконечно много решений.

Приведём примеры к двум последним случаям.

Рис. 42

Задача 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 2x + 4y = 8. \end{cases} \qquad (4)$$

► Умножим первое уравнение системы на 2: $\begin{cases} 2x + 4y = 12, \\ 2x + 4y = 8. \end{cases}$

Левые части уравнений этой системы равны при любых значениях x и y, а правые части не равны. Следовательно, нет таких значений x и y, которые обращают оба уравнения системы в верные равенства.

Ответ. Решений нет. ◁

Геометрически это означает, что графики уравнений системы (4) — параллельные прямые (рис. 42).

Задача 3. Показать, что прямые $x-2y=2$ и $3x-6y=6$ совпадают.

▶ Так как уравнение $3x-6y=6$ получается из уравнения $x-2y=2$ умножением его обеих частей на 3, то эти уравнения выражают одну и ту же зависимость между x и y. Следовательно, графиками этих уравнений является одна и та же прямая (рис. 43). ◁

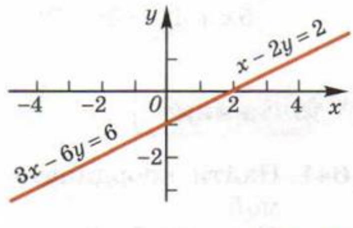


Рис. 43

Это означает, что система уравнений $x-2y=2$ и $3x-6y=6$ имеет бесконечно много решений: координаты любой точки прямой $x-2y=2$ являются решением данной системы.

Устные вопросы и задания

1. Что является графиком уравнения $ax+by=c$, если хотя бы одно из чисел a или b не равно нулю?
2. Что значит решить графически систему уравнений?
3. Какие существуют случаи взаимного расположения двух прямых на плоскости?
4. Даны две прямые на координатной плоскости, причём каждая из них является графиком некоторого уравнения. Описать связь взаимного расположения прямых и числа решений системы соответствующих уравнений.
5. Привести пример системы двух линейных уравнений:
   1) имеющей единственное решение;
   2) не имеющей решений;
   3) имеющей бесконечно много решений.

Вводные упражнения

1. Построить график функции: 1) $y=-2x+0{,}5$; 2) $y=\frac{1}{2}x-1$.
2. Выразить y из уравнения:
   1) $3y=5$; 2) $0{,}5y=-7$; 3) $9-2y=-3$; 4) $2x-y=1$; 5) $3x+y=2$.

3. Способом подстановки решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 7x-6y=20, \\ 3x-y=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+9y=-1, \\ x+2y=4. \end{cases}$

4. Способом алгебраического сложения решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} -5x+3y=11, \\ 5x+4y=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x-2y=8, \\ 3x-2y=3. \end{cases}$

Упражнения

641. Найти координаты точек пересечения с осями координат прямой:

1) $x-y+5=0$; 2) $3x-y+3=0$;
3) $2x+y=1$; 4) $5x+2y=12$.

642. Построить график уравнения:

1) $y=3x+5$; 2) $3x+y=1$; 3) $2y+7x=-4$;
4) $4y-7x-12=0$; 5) $2y-6=0$; 6) $5x+10=0$.

643. В одной системе координат построить графики уравнений $y=2x+1$ и $x+y=1$. Найти координаты точки их пересечения. Проверить, обращают ли координаты точки пересечения графиков каждое из уравнений в верное равенство.

Решить графически систему уравнений **(644—646)**.

644. 1) $\begin{cases} y=4x, \\ y-x=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=-3x, \\ y-x=-4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y=2x, \\ x-y=-3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y=3x, \\ 4x-y=3. \end{cases}$

645. 1) $\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ 2x-y=3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x-y=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+3y=6, \\ 2x+y=7. \end{cases}$

646. 1) $\begin{cases} 2x+y=8, \\ 2x-y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+y=2, \\ x+2y=-6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ y-x=4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x+3y=6, \\ 2x+y=4; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x-y=-6, \\ -2x+5y=4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x+y=4, \\ -5x+2y=8. \end{cases}$

647. Показать, что система уравнений не имеет решений:

1) $\begin{cases} y=3x, \\ 6x-2y=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=6, \\ 2x=1-2y. \end{cases}$

648. Показать, что система уравнений имеет бесконечно много решений:

1) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x + 2y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 3, \\ 2x - 2y = 6. \end{cases}$

649. Показать графически, что система уравнений имеет единственное решение:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 3x - y = 13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$

650. Привести пример системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, решением которой являются координаты точки пересечения графика уравнения $4x + y = 7$ с осью Ox.

651. Привести пример системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, решением которой являются координаты точки пересечения графика уравнения $5x - 7y = 1$ с осью Ox.

652. Составить такое линейное уравнение с двумя неизвестными, чтобы оно вместе с уравнением $-x - y = 4$ образовало систему:
1) имеющую единственное решение;
2) имеющую бесконечно много решений;
3) не имеющую решений.

Разговор о важном

О внутрипредметных связях в курсе алгебры

Поговорим о связях отдельных тем и понятий внутри алгебры. А то у некоторых школьников складывается впечатление, что, например, уравнения лежат на одной полке математики, а функции с графиками — на другой. На самом же деле, образно говоря, они лежат на одной. Давайте вспомним Декарта и попробуем разобраться, где используется изобретённый им метод координат. Напомню, что Декарт первым ввёл понятие переменной величины. Это понятие появилось в его опубликованной работе под названием «Геометрия» в 1637 г.

Вы говорили нам, что алгебра выросла из практических задач геометрии...

Да, но это была геометрия, изложенная языком алгебры. Декарт при описании метода координат рассматривал изменение ординаты y точки, описывающей некоторую линию, в зависимости от изменений абсциссы x этой точки. После публикации Декарта многие математики в уравнении с двумя неизвестными стали *неизвестные* x и y рассматривать *как переменные*. А само уравнение вида $ax + by = c$ при $b \neq 0$

стали записывать в виде $y = kx + m$ и понимать его как закон изменения y в зависимости от x, т. е. понимать его как линейную функцию.

То есть благодаря методу координат мы можем переходить от чисел к точкам координатной плоскости, а от точек — к линиям, от линий — к функциям, уравнениям, системам уравнений?

Абсолютно верно. А от функций и уравнений можно через алгебру переходить в геометрию и возвращаться обратно.

§ 37 Решение задач с помощью систем уравнений

В этом параграфе вы убедитесь, что отдельные текстовые задачи намного проще решаются не с помощью одного уравнения с одним неизвестным, а с помощью системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Нужно вспомнить:

- формулы законов движения и работы;
- формулы нахождения процентов от числа и числа по его процентам;
- формулу стоимости покупки;
- свойства уравнений;
- решение систем линейных уравнений с двумя неизвестными способами подстановки и сложения;
- этапы решения текстовой задачи с помощью уравнения.

Задача 1. Расстояние между двумя пристанями на реке равно 60 км. Это расстояние катер проходит по течению реки за 2 ч, а против течения за 3 ч. Найти собственную скорость движения катера и скорость реки.

► 1) Введём обозначения:
x км/ч — скорость движения катера в стоячей воде;
y км/ч — скорость течения реки. Тогда $(x+y)$ км/ч — скорость катера при движении по течению реки;
$2(x+y)$ км — путь, который прошёл катер по течению реки за 2 ч. По условию задачи это расстояние равно 60 км:

$$2(x+y) = 60.$$

Далее, $(x-y)$ км/ч — скорость катера при движении против течения реки и $3(x-y)$ км — путь, который прошёл катер против течения реки за 3 ч. По условию это расстояние также равно 60 км: $3(x-y)=60$.

Так как в полученных уравнениях x и y обозначают одни и те же числа, то эти уравнения образуют систему

$$\begin{cases} 2(x+y)=60, \\ 3(x-y)=60. \end{cases} \qquad (1)$$

2) Решим систему (1). Упростим каждое из уравнений системы, поделив первое уравнение на 2, а второе — на 3:

$$\begin{cases} x+y=30, \\ x-y=20. \end{cases} \qquad (2)$$

Складывая эти уравнения, находим $2x=50$, $x=25$. Вычитая из первого уравнения системы (2) второе уравнение, получаем

$$2y=10, \quad y=5.$$

3) Возвращаясь к условию задачи и использованным обозначениям, запишем ответ.

Ответ. Собственная скорость движения катера 25 км/ч, скорость течения реки 5 км/ч. ◁

Задача 2. Найти два числа, если удвоенная сумма этих чисел на 5 больше их разности, а утроенная сумма этих чисел на 8 больше их разности.

▶ 1) Составление системы уравнений.

Пусть x, y — искомые числа. Тогда по условию задачи имеем:

$$\begin{cases} 2(x+y)=(x-y)+5, \\ 3(x+y)=(x-y)+8. \end{cases} \qquad (3)$$

2) Решение системы.

Упростим уравнения системы (3):

$$\begin{cases} 2x+2y=x-y+5, \\ 3x+3y=x-y+8; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3y=5, \\ 2x+4y=8. \end{cases} \qquad (4)$$

Разделим обе части второго уравнения на 2 и вычтем полученное уравнение из первого:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} x+3y=5 \\ x+2y=4 \end{array} \\ \hline y=1. \end{array}$$

Подставляя $y=1$ в первое уравнение системы (4), находим $x+3\cdot1=5$, $x=2$.

3) Так как x и y обозначают искомые числа, то можем записать ответ.

Ответ. Искомые числа 2 и 1. ◁

Обычно задачу с помощью системы уравнений решают по следующей схеме:

1) вводят обозначения неизвестных и составляют систему уравнений;
2) решают систему уравнений;
3) возвращаясь к условию задачи и использованным обозначениям, записывают ответ.

Иногда после решения системы приходится провести ещё некоторые рассуждения или вычисления. Приведём пример.

Задача 3. Два карандаша и три тетради стоят 35 р., а три карандаша и две тетради стоят 40 р. Сколько стоят пять карандашей и шесть тетрадей?

▶ 1) Пусть x р. — цена карандаша, y р. — цена тетради.

По условию задачи имеем: $\begin{cases} 2x+3y=35, \\ 3x+2y=40. \end{cases}$

2) Вычтем из первого уравнения, умноженного на 3, второе, умноженное на 2:

$$\begin{array}{r} -\,6x+9y=105 \\ 6x+4y=80 \\ \hline 5y=25, \end{array}$$

откуда $y=5$. Подставляя $y=5$ в первое уравнение системы, находим $2x+3\cdot5=35$, $2x=20$, $x=10$.

3) Итак, $x=10$, $y=5$ — решение системы, т. е. карандаш стоит 10 р., тетрадь — 5 р., 5 карандашей и 6 тетрадей стоят

$$5\cdot10+6\cdot5=80 \text{ (р.)}.$$

Ответ. 80 р. ◁

Устные вопросы и задания

1. Перечислить этапы решения текстовой задачи с помощью системы уравнений.
2. Объяснить необходимость выполнения третьего этапа решения задач с помощью уравнений.
3. Всегда ли неизвестными обозначают величины, которые требуется найти в задаче? Ответ обосновать.

Вводные упражнения

Записать выражение для нахождения:

1) расстояния (в километрах), пройденного пешеходом за 5 ч, если его скорость x км/ч;

2) стоимости (в рублях) y тетрадей, если цена одной тетради 20 р.;

3) времени (в часах), за которое лодка по течению реки преодолела расстояние x (в километрах), если собственная скорость лодки 7 км/ч, а скорость течения реки y км/ч;

4) цены (в рублях) товара после уценки его на 5%, если прежняя цена составляла x р.;

5) производительности труда рабочего (в деталях за час), который 200 деталей изготовил за x ч;

6) производительности труда (в деталях за час) двух рабочих при совместной работе, если на изготовление 30 деталей первому рабочему требуется x ч, а второму — y ч.

Упражнения

653. Ученик за 3 тетради и 2 карандаша уплатил 6 р. 60 к. Другой ученик за такие же 2 тетради и 2 карандаша уплатил 4 р. 60 к. Найти цену тетради и карандаша.

654. Из 14 м ткани можно сшить 4 мужских и 2 детских пальто. Сколько метров ткани необходимо для пошива одного мужского и одного детского пальто, если из 15 м той же ткани можно сшить 2 мужских и 6 детских пальто?

655. Две бригады собрали вместе 1456 ц ржи. Первая бригада собрала рожь с 46 га, а вторая — с 35 га. Сколько центнеров собрала в среднем с 1 га каждая бригада в отдельности, если первая собрала с 1 га на 7 ц ржи больше, чем вторая?

656. На платформу были погружены дубовые и сосновые брёвна, всего 300 брёвен. Известно, что все дубовые брёвна весили на 1 т меньше, чем все сосновые. Определить, сколько было дубовых и сосновых брёвен отдельно, если каждое бревно из дуба весит 46 кг, а каждое сосновое бревно — 28 кг.

657. Двое рабочих изготовили вместе 1020 деталей. Первый рабочий работал 15 дней, а второй — 14 дней. Сколько деталей изготовлял каждый рабочий за один день, если первый рабочий за 3 дня изготовлял на 60 деталей больше, чем второй за 2 дня?

658. Два тракториста заборонoвали вместе 678 га пашни. Первый тракторист работал 8 дней, а второй — 11 дней. Сколько гектаров боронoвал за день каждый тракторист, если первый за 3 дня заборонoвал на 22 га меньше, чем второй за 4 дня?

659. Для 8 лошадей и 15 коров отпускали ежедневно 162 кг сена. Сколько сена ежедневно выдавали каждой лошади и каждой корове, если известно, что 5 лошадей получили сена на 3 кг больше, чем 7 коров?

660. Два мастера получили за работу 23 400 р. Первый работал 15 дней, а второй — 14 дней. Сколько получал в день каждый из них, если известно, что первый мастер за 4 дня получил на 2200 р. больше, чем второй за 3 дня?

661. В двух баках содержалось 140 л воды. Когда из первого бака взяли 26 л воды, а из второго — 60 л, то в первом баке осталось в 2 раза больше воды, чем во втором. Сколько литров воды было в каждом баке первоначально?

662. В одном бидоне на 5 л молока больше, чем в другом. Если из первого бидона перелить во второй 8 л молока, то во втором бидоне молока станет в 2 раза больше, чем останется в первом. Сколько литров молока в каждом бидоне?

663. Лодка прошла 12 км по течению реки и обратно за 2,5 ч. В другой раз та же лодка за 1 ч 20 мин прошла по течению реки 4 км, а против течения 8 км. Найти скорость лодки в стоячей воде и скорость течения реки.

664. Из двух городов, расстояние между которыми 650 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Через 10 ч поезда встретились. Если же первый поезд отправится на 4 ч 20 мин раньше второго, то встреча произойдет через 8 ч после отправления второго поезда. Сколько километров в час проходит каждый поезд?

665. Фермер собрал с двух участков 460 т клевера. На второй год на первом участке урожай увеличился на 15%, а на втором — на 10% и общий урожай клевера составил 516 т. Сколько тонн клевера было собрано с каждого участка в первый год?

666. В январе два цеха изготовили 1080 деталей. В феврале первый цех увеличил выпуск деталей на 15%, второй — на 12%, оба цеха изготовили 1224 детали. Сколько деталей изготовил в феврале каждый цех?

667. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, на 54 больше данного числа. Найти это число.

668. Сумма цифр двузначного числа равна 12, а разность числа единиц и числа десятков в этом числе в 12 раз меньше самого числа. Найти это число.

669. В три сосуда налита вода. Если половину воды из первого сосуда перелить во второй, затем $\frac{1}{3}$ часть воды, оказавшейся во втором сосуде, перелить в третий и, наконец, $\frac{1}{4}$ часть воды, оказавшейся в третьем сосуде, перелить в первый, то в каждом сосуде станет по 6 л. Сколько воды было в каждом сосуде до переливания?

670. Пристань A находится между пристанями B и C, причём пристань B находится ниже других по течению реки. Маршрут от A до B и от B до C теплоход проходит за 9 ч 20 мин, а маршрут от C до B и от B до A — за 9 ч. Скорость теплохода относительно воды равна 20 км/ч, а скорость течения реки равна 4 км/ч. Найти расстояние между пристанями A и C.

Диалог об истории

Системы уравнений в древнекитайском трактате

Профессор, раз в древности умели решать задачи с помощью одного уравнения, может быть, тогда и с помощью систем уравнений решались какие-нибудь задачи?

Действительно, задачи, решённые с помощью систем уравнений с несколькими неизвестными, встречаются в вавилонских и египетских текстах, датированных вторым тысячелетием до н. э. Древнегреческие, китайские и индийские учёные также умели решать некоторые задачи с помощью систем. В знаменитом древнекитайском трактате *«Математика в девяти книгах»* можно найти даже правила решения некоторых систем.

Рассмотрим конкретную задачу из этого трактата, излагая всё современным языком и используя понятную нам символику.

Задача. Два человека получили некоторое число монет. Если к числу монет первого добавить половину монет второго или к монетам второго добавить $\frac{2}{3}$ монет первого, то в обоих случаях получится 48. Сколько монет у каждого?

Решение этой задачи выглядит следующим образом.

Пусть x монет было у первого, а y монет — у второго человека. Получаем из условия систему:

$$\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} = 48, \\ \dfrac{2}{3}x + y = 48, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x + y = 96, \\ 2x + 3y = 144. \end{cases}$$

Далее в трактате даётся правило по составлению таблицы: «В правом столбце установи 2 для первого человека, 1 — для второго и 96 монет. Установи в левом столбце таблицы 2 для первого человека, 3 — для второго и 144 монеты». Получится таблица:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 144 & 96 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Далее из первого столбца таблицы вычитается второй, а второй столбец сохраняется. В результате получается новая таблица:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 48 & 96 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Отсюда легко находим: $2y = 48$, $y = 24$ и $x = \dfrac{96 - 24}{2} = 36$.

Преобразование таблицы (1) к «треугольному виду» (2) — в левом верхнем углу записан 0 — давало возможность переходить к решению одного уравнения с одним неизвестным, а затем подстановкой находить другое неизвестное.

Интересные таблицы. Фактически это компактная запись действий с уравнениями системы.

Да, действительно, удобная форма записи. Если вам будет интересно, посмотрите в Интернете или в справочнике более подробную информацию о подобных таблицах — *матрицах*, *определителях*. Хочу ещё посоветовать вам поискать описание решения систем линейных уравнений *методом двух ложных положений*. Помните, я рассказывал вам о методе ложного положения, которым пользовались в Средние века для решения одного линейного уравнения? Тогда же был изобретён аналогичный метод для решения систем. И хотя метод был достаточно трудоёмким в реализации, тем не менее им пользовались и в Азии, и в Европе вплоть до XVIII в.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VII

Решить систему уравнений **(671—673)**.

671. 1) $\begin{cases} 2x + y = 2, \\ 6x - 2y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 6y = 4, \\ 2x - 3y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 7y = 2, \\ 5x + 13y = 12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x + y = 3, \\ 9x + 2y = 4. \end{cases}$

672. 1) $\begin{cases} 2(x + y) - 3(x - y) = 4, \\ 5(x + y) - 7(x - y) = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5(3x + y) - 8(x - 6y) = 20, \\ 6(x - 10y) - 13(x - y) = 52. \end{cases}$

673. 1) $\begin{cases} 16x - 27y = 20, \\ 5x + 18y = 41{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 18x - 21y = 2, \\ 24x - 15y = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x - 4y) = x - y, \\ \frac{x}{2} + y = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3(x - y) = 6(y + 1), \\ \frac{x}{3} - 1\frac{1}{3} = y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{x - y}{3} - \frac{1}{2} = \frac{x - y}{4}, \\ \frac{x - y}{2} = 4{,}5 + \frac{y - 1}{3}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \frac{x + y}{5} - \frac{y - x}{2} = x + \frac{3}{20}, \\ \frac{x - y}{4} + \frac{x + y}{3} = y - 7\frac{1}{24}. \end{cases}$

674. Показать, что система уравнений не имеет решений:

1) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 10x + 5y = 10. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 8y = -1, \\ x + 2\frac{2}{3}y = 5. \end{cases}$

675. Показать, что система уравнений имеет бесконечно много решений:

1) $\begin{cases} x = 5 - y, \\ y = 5 - x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ y = \frac{13 - 2x}{3}. \end{cases}$

676. Подобрать такие значения a и c, чтобы система уравнений $\begin{cases} x + y = 5 \\ ax + 3y = c \end{cases}$ имела: 1) единственное решение; 2) бесконечно много решений; 3) не имела решений.

677. 1) В одни ящики положили по 10 кг яблок, в другие по 20 кг. Суммарная масса этих яблок составляет 110 кг. Сколько ящиков по 10 кг и сколько по 20 кг заполнено яблоками?

2) Проволока длиной 1 м 12 см разрезана на куски по 18 см и 24 см. Сколько кусков каждого вида получилось?

678. Отец старше дочери на 26 лет, а через 4 года будет старше её в 3 раза. Сколько лет отцу и сколько дочери?

679. Турист выехал из города A и должен приехать в город B в назначенный срок. Если он будет ехать со скоростью 35 км/ч, то опоздает на 2 ч; если же он будет ехать со скоростью 50 км/ч, то приедет на час раньше срока. Определить расстояние между городами A и B и время, затраченное туристом на путь из города A в город B, если он прибыл в назначенный срок.

680. Для детской музыкальной школы решили приобрести 4 баяна и 3 аккордеона на сумму 132 600 р. Спонсор оплатил 30% стоимости каждого аккордеона, и школе осталось заплатить 110 100 р. Сколько денег заплатила школа за каждый баян и каждый аккордеон?

681. Две бригады лесорубов заготовили в декабре 900 кубометров дров. В январе первая бригада заготовила на 15%, а вторая — на 12% больше, чем в декабре, и поэтому обе бригады вместе заготовили за это время 1020 кубометров дров. Сколько кубометров дров заготовила каждая бригада в январе?

682. Сад имеет форму прямоугольника. Если увеличить длину сада на 8 м, а ширину на 6 м, то площадь сада увеличится на 632 м^2. Если же длину сада уменьшить на 6 м, а ширину увеличить на 8 м, то площадь сада увеличится на 164 м^2. Определить длину и ширину сада.

683. Во всех строках некоторой страницы книги одинаковое число букв. Если на этой странице уменьшить число строк на 4, а число букв в строке на 5, то число букв на всей странице уменьшится на 360. Если же на странице увеличить число строк на 3, а число букв в строке на 2, то на странице поместится на 228 букв больше, чем было. Определить число строк и число букв в строке на этой странице книги.

684. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{12}, \\ \dfrac{2}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{6}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{y}=35, \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x}=27; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{3}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=4, \\ \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{15}{x-y}=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{10}{x+y}-\dfrac{4}{x-y}=3, \\ \dfrac{7}{x+y}-\dfrac{6}{x-y}=2. \end{cases}$

685. Антикварный магазин, купив две старинные вазы на общую сумму 36 000 р., продал их, получив 25% прибыли. За сколько была продана каждая ваза, если наценка на первую вазу была 50%, а на вторую — 12,5%?

СТАРИННЫЕ ЗАДАЧИ

1. *(Из VII книги древнекитайского трактата «Математика в девяти книгах».)* Имеется 9 слитков золота и 11 слитков серебра, их взвесили, вес совпал. Переложили слиток золота и слиток серебра, золото стало легче на 13 ланов. Каков вес слитка золота и слитка серебра, каждого в отдельности?

2. *(Задача Бхаскары.)* Некто сказал другу: «Дай 100 рупий, и я буду вдвое богаче тебя». Друг ответил: «Дай мне только 10, и я стану в 6 раз богаче тебя». Сколько было у каждого?

3. *(Из трактата «Математика в девяти книгах».)* Сообща покупают курицу. Если каждый человек внесёт по 9 монет, то останется 11, если же каждый внесёт по 6 монет, то не хватит 16. Найти количество людей и стоимость курицы.

4. *(Из трактата «Математика в девяти книгах».)* Имеется 5 воробьёв и 6 ласточек, их взвесили на весах. Вес всех воробьёв больше веса всех ласточек. Если переместить 1 ласточку и 1 воробья, то вес как раз будет одинаковым. Общий вес ласточек и воробьёв 1 цзинь. Спрашивается, сколько весят ласточка и воробей в отдельности.

5. *(Из «Всеобщей арифметики» Ньютона.)* Некто желает распределить между бедными деньги. Если бы у него было на 8 динариев больше, то он мог бы дать каждому по 3 динария, но он раздаёт лишь по 2 динария и у него остаётся 3 динария. Сколько было бедных?

ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Электричка проехала мимо столба за 12 с, а мимо платформы длиной 350 м за 26 с. Найти длину электрички и её скорость.

Указание. Ввести обозначения:
x м — длина электрички,
y м/с — скорость электрички.
Так как электричка со скоростью y проехала мимо столба за 12 с, то пройденный за это время путь и будет равен её длине, т. е. $x=12y$.
За 26 с электричка прошла путь, равный длине платформы, сложенный с её собственной длиной, т. е. $26y=350+x$.

2. Сплав содержит меди на 640 г больше, чем цинка. Когда из сплава выделили $\frac{6}{7}$ содержащейся в нём меди и 60% цинка, масса сплава стала 200 г. Сколько весил сплав первоначально?

3. Чашка с блюдцем вместе стоили 155 р. После того как чашка подешевела на 10%, а блюдце на 15%, их суммарная стоимость составила 136 р. Сколько стоила чашка и сколько стоило блюдце до уценки?

4. После того как с первого склада вывезли 30% имевшегося там сахара, а со второго — 20% сахара, оказалось, что на двух складах осталось 436 ц сахара. На следующий день со второго склада вывезли 25% оставшегося сахара, и оказалось, что на нём стало на 33 ц сахара больше, чем оставалось на первом складе. Сколько сахара было на каждом складе первоначально?

5. В сплаве A массы золота и серебра относились как $1:2$, а в сплаве B — как $2:3$. Когда их сплавили вместе, получили новый сплав с отношением масс золота и серебра $7:12$. Чему было равно отношение масс сплавов A и B?

В этой главе вы узнали,

что такое:

— уравнение первой степени (линейное уравнение) с двумя неизвестными;
— решение уравнения с двумя неизвестными;
— система уравнений;
— решение системы двух уравнений с двумя неизвестными;
— график линейного уравнения с двумя неизвестными;

как:

— решать систему линейных уравнений с двумя неизвестными способом подстановки; способом алгебраического сложения; графически;
— определять число решений системы линейных уравнений с помощью графиков;
— решать текстовые задачи с помощью системы уравнений.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

1. Проверить, является ли пара чисел $x=2$ и $y=1$ решением системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x-3y=1, \\ 5x+y=11. \end{cases}$$

2. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=2, \\ 3x+4y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+4y=-1, \\ 2x-5y=7. \end{cases}$

3. Яблоки и груши упакованы в одинаковые ящики. Масса яблок в пяти ящиках и груш в трёх ящиках вместе составляют 70 кг. Масса яблок в одном ящике и груш в двух ящиках вместе составляет 26 кг. Сколько килограммов яблок и сколько килограммов груш содержится в одном ящике?

II уровень

4. При каких значениях a система уравнений:

$$\begin{cases} y=ax, \\ y=-3x+2 \end{cases}$$

1) не имеет решений; 2) имеет единственное решение?

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2x+4}{10}=1-\dfrac{9(y-3)}{20}, \\ \dfrac{3y-4}{4}=\dfrac{9-x}{3}-\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

6. Сумма цифр двузначного числа равна 10. Число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, на 36 больше данного числа. Найти это число.

III уровень

7. Дана система уравнений

$$\begin{cases} ax + 3y = a, \\ (a - 2)x + y = 1. \end{cases}$$

При каких значениях a данная система имеет единственное решение?

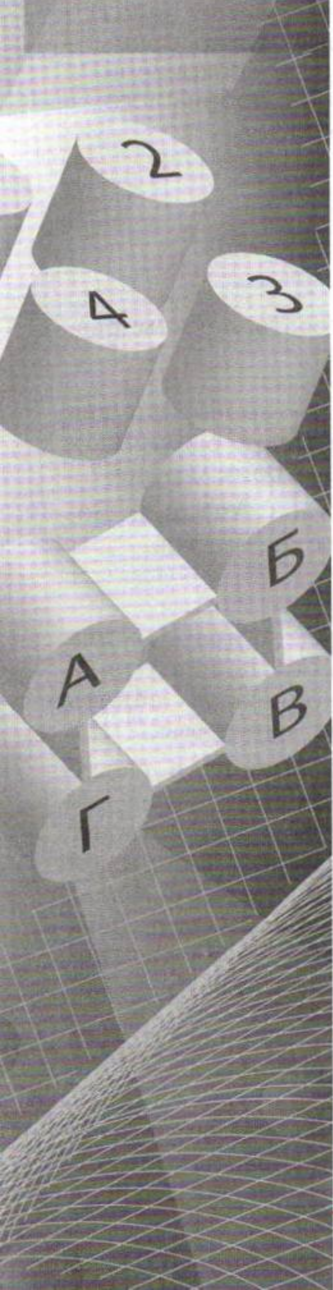
8. Дан график уравнения первой степени с двумя неизвестными, который проходит через точки (0; –6) и (3; 0). При каком значении a график уравнения $ax + 3y = 4$ не пересечёт данный график?

9. Один и тот же товар компания продавала в двух разных городах. В первом городе товар был продан с прибылью 20%, а во втором — с прибылью 50%. Общая прибыль компании оказалась равной 30%. В каком городе товара продали больше и во сколько раз?

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Решение систем линейных уравнений в Древней Индии.
2. Решение систем линейных уравнений в Древнем Китае. Трактат «Математика в девяти книгах».
3. Метод двух ложных положений в трудах ал-Хорезми, Л. Фибоначчи и в учебнике Л. Ф. Магницкого.
4. Определители второго порядка и правило Крамера.
5. Решение систем линейных уравнений с тремя неизвестными.

ГЛАВА VIII Элементы комбинаторики



В математике существует немало задач, в которых требуется из имеющихся элементов составить различные наборы или подсчитать количество всевозможных комбинаций элементов, образованных по определённому правилу. Такие задачи называются комбинаторными, а раздел математики, занимающийся решением этих задач, — **комбинаторикой**.

Практически во всех областях человеческой деятельности приходится заниматься выбором определённых объектов из некоторого множества и расположением этих объектов в том или ином порядке. Например, в сельском хозяйстве каждый год решают комбинаторную задачу: подбирают оптимальную последовательность подготовки к посевным работам с учётом погодных условий, трудовых ресурсов и т. д. Собираясь в поход, турист укладывает в рюкзак вещи то одним, то другим способом, добавляя в него или вынимая из него часть предметов. Рассматривая меню обедов в кафе, человек мысленно составляет комбинации из различных первых, вторых и третьих блюд, после чего делает выбор. Комбинаторные задачи постоянно возникают во время настольных и компьютерных игр и т. д.

Комбинаторика как самостоятельный раздел математики оформилась в XVIII в., когда в задачах подсчёта вариантов стала нуждаться новая математическая теория — **теория вероятностей**. Первым стал рассматривать комбинаторику как самостоятельную ветвь математики немецкий учёный Г. Лейбниц, опубликовавший в 1666 г. работу «Об искусстве комбинаторики». В этой работе впервые появился и сам термин *комбинаторика*.

Несмотря на внешние различия комбинаторных задач, многие из них имеют одно и то же математическое содержание. Учёные выделили основные типы комбинаторных задач, к которым сводятся многие проблемы перечисления и подсчёта комбинаций, вариантов. С основными типами комбинаторных задач, а также со способами их решения вы и познакомитесь в этой главе.

§ 38 Различные комбинации из трёх элементов

Нередко в жизни и практике возникают ситуации, когда задача имеет не одно, а несколько решений, которые нужно сравнить, а затем выбрать наиболее подходящее для конкретной ситуации. Составлению различных комбинаций из небольшого числа элементов вы научитесь в этом параграфе.

Нужно вспомнить:

- сравнение натуральных чисел;
- практические ситуации перебора вариантов.

Рассмотрим простейшие задачи, связанные с составлением различных комбинаций из трёх элементов.

Задача 1. Три друга — Антон, Борис и Виктор — приобрели два билета на футбольный матч. Сколько существует различных вариантов посещения футбольного матча для троих друзей?

► По двум билетам на матч могут пойти: 1) либо Антон и Борис; 2) либо Антон и Виктор; 3) либо Борис и Виктор.

Ответ. 3 варианта. ◁

Задача 2. Три друга — Антон, Борис и Виктор — приобрели два билета на футбольный матч на 1-е и 2-е места первого ряда стадиона. Сколько у друзей есть вариантов (способов) занять эти два места на стадионе? Записать все эти варианты.

► Для удобства перечисления всех возможных вариантов рассаживания друзей будем записывать лишь первые буквы их имён. Запись АБ будет означать, что на первом месте сидит Антон, а на втором — Борис. После записи каждой пары имён мальчиков, идущих на матч (по результатам решения задачи 1 таких пар 3), будем записывать новую пару, полученную перестановкой в ней букв (обозначающую результат пересаживания мальчиков со своего места на другое):

$$АБ;\ БА;\ АВ;\ ВА;\ БВ;\ ВБ. \qquad (1)$$

Ответ. 6 вариантов: АБ; БА; АВ; ВА; БВ; ВБ. ◁

Заметим, что пары мальчиков, составляемые в задачах 1 и 2, отличались друг от друга. В задаче 1 нас не интересовал порядок рассаживания двух из трёх мальчиков по местам, т. е. пары Антон — Борис и Борис — Антон считались одной и той же. В задаче 2 пары АБ и БА были различными парами, так как нас интересовал и порядок рассаживания мальчиков (поэтому в задаче 2 вариантов было в 2 раза больше, чем в задаче 1).

Договоримся, что, если нужно представить комбинацию элементов, в которой *порядок* расположения элементов *не важен*, будем записывать эти элементы через запятую: А,Б и Б,А — одна и та же пара элементов. Если же *порядок* расположения элементов в комбинации *важен*, то отделять элементы друг от друга запятой не будем: АБ и БА — разные пары.

Задача 3. Антону, Борису и Виктору повезло, и они купили 3 билета на футбол на 1, 2 и 3-е места первого ряда стадиона. Сколькими способами мальчики могут занять эти места?

► Число способов будет таким же, как и в задаче 2. Действительно, если к каждой паре мальчиков из записи (1), сидящих на 1-м и 2-м местах, добавить на 3-е место их друга, то будут составлены всевозможные варианты рассаживания мальчиков по трём местам:

$$\text{АБВ; БАВ; АВБ; ВАБ; БВА; ВБА.} \qquad (2)$$

Ответ. 6 способами. ◁

Шаг вперёд

Говоря математическим языком, в задаче 1 составлены всевозможные **сочетания** из трёх элементов по два. Пары отличались составом элементов, а порядок расположения элементов в паре не учитывался. В задаче 2 из тех же трёх элементов выбирались пары и фиксировался порядок расположения элементов в паре, т. е. пары отличались друг от друга либо составом элементов, либо их расположением в паре. В комбинаторике такие пары называют **размещениями** из трёх элементов по два.

В задаче 3 были составлены всевозможные **перестановки** из трёх элементов: комбинации из трёх элементов, отличающиеся друг от друга порядком расположения в них элементов.

Задача 4. Сколько различных трёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2 и 3 при условии, что цифры в числе: 1) должны быть различными; 2) могут повторяться?

▶ 1) Способ составления трёхзначных чисел из 3 различных цифр аналогичен способу образования троек букв в задаче 3:

$$123,\ 213,\ 132,\ 312,\ 231,\ 321. \qquad (3)$$

Получили 6 чисел.

2) Перебор вариантов можно организовать следующим образом. Выпишем все числа, начинающиеся с цифры 1, в порядке их возрастания; затем — начинающиеся с цифры 2; после чего — начинающиеся с цифры 3:

111	112	113	211	212	213	311	312	313
121	122	123	221	222	223	321	322	323
131	132	133	231	232	233	331	332	333

Получили 27 чисел.

Ответ. 1) 6; 2) 27. ◁

Устные вопросы и задания

1. Какие задачи называют комбинаторными?
2. Чем занимается комбинаторика?
3. Как записать комбинации из нескольких элементов, если порядок расположения элементов в комбинации: 1) имеет значение; 2) не имеет значения?

Вводные упражнения

1. Используя каждую из цифр 0, 1, 2 по одному разу, записать наибольшее; наименьшее трёхзначное число.
2. С помощью цифр 0, 2, 4 записать наибольшее; наименьшее двузначное число так, чтобы цифры в числе: 1) были разными; 2) могли повторяться.

Упражнения

686. (Устно.) Сколько разных подарочных наборов: 1) из одного предмета; 2) из двух предметов можно составить, выбирая из имеющихся одной вазы и одной ветки сирени?

687. (Устно.) Сколькими способами Петя и Вова могут занять 2 места за одной двухместной партой?

688. Сколько различных по комплектации парфюмерных наборов из двух предметов можно составить, если в наличии имеются одинаковые флаконы одеколона и одинаковые куски мыла?

689. С помощью цифр 2 и 3 записать все возможные двузначные числа, в которых цифры: 1) разные; 2) могут повторяться.

690. Имеются помидоры (п), огурцы (о) и лук (л). Сколько различных салатов можно приготовить, если в каждый из них должны входить в равных долях 2 различных вида овощей? Записать все сочетания овощей в составляемых салатах.

691. Имеются 3 предмета: карандаш, тетрадь и линейка. Сколькими способами из этих канцелярских принадлежностей можно выбрать: 1) один предмет; 2) три предмета; 3) два предмета?

692. Боря идет на день рождения к одноклассникам, близнецам Алёше и Яше. Он хочет подарить каждому из них по мячу. В магазине остались для продажи только 3 мяча разных цветов: белый, чёрный и пятнистый. Сколькими способами Боря может купить 2 мяча (выбирая их из трёх имеющихся) для подарков братьям?

693. Ашот (А), Марат (М) и Сергей (С) могут занять 1, 2 и 3-е призовые места в соревнованиях. Перечислить все возможные последовательности из имён мальчиков, где порядковый номер в последовательности соответствует занятому мальчиком месту в соревнованиях. Подсчитать количество таких последовательностей.

694. В магазин поступила партия кепок трёх цветов: белые (б), красные (к) и синие (с). Кира и Лена покупают себе по одной кепке. Сколько существует различных вариантов покупок для этих девочек? Перечислить их.

695. Записать все двузначные числа, в записи которых встречаются только цифры 2, 3 и 4, если: 1) одинаковых цифр в числе не должно быть; 2) цифры в числе могут повторяться.

696. Перечислить все двузначные числа, в записи которых встречаются только цифры 0, 1 и 2, если: 1) одинаковых цифр в числе не должно быть; 2) цифры в числе могут повторяться.

697. Перечислить все трёхзначные числа, в записи которых встречаются только цифры 1 и 2.

698. Перечислить все трёхзначные числа, в записи которых используются цифры 0, 1 и 2, при условии, что: 1) цифры в числе различны; 2) цифры в числе могут повторяться.

699. У жителей планеты ХО в алфавите три буквы: А, О, Х. Слова в языке состоят не более чем из трёх букв (буква в слове может повторяться). Какое наибольшее количество слов может быть в словаре жителей этой планеты?

Это интересно

Исторические комбинаторные задачи

Профессор, в начале главы было сказано, что в различных настольных играх возникают комбинаторные задачи.

Действительно, даже планирование каждого следующего хода в шашках, шахматах или карточной игре есть комбинаторная задача. В шахматах есть и сложные комбинаторные задачи, ставшие классическими. Например, интересна *задача размещения на доске восьми ферзей таким образом, чтобы ни один из них не оказался под боем.*

А в древности решались интересные комбинаторные задачи? Расскажите о них, если знаете.

В древние времена рассматривались интересные задачи-игры. Например, в Древней Греции занимались теорией *фигурных чисел* (о чём я вам уже рассказывал). В Древнем Китае увлекались составлением *магических квадратов* и *латинских квадратов*. Я расскажу о магических и латинских квадратах таким образом, чтобы ваши *алгебраические и геометрические знания* помогли нам в обосновании *математических развлечений*.

1. Магические квадраты

Поместим натуральные числа от 1 до 9 в клетках квадрата размером 3×3 так, чтобы все суммы чисел по горизонталям и по вертикалям, а также по диагоналям были одинаковы (для квадрата 3×3 они равны 15). Полученный квадрат, а также другие квадраты с теми же свойствами называют *магическими квадратами*.

Магического квадрата размером 2×2 не существует. Существует единственный магический квадрат 3×3 (рис. *а*). Внешне отличные от него варианты квадрата 3×3 можно получить либо зеркальным отражением чисел относительно осей симметрии квадрата (их у квадрата 4, см. рис. *б*), либо поворотом на 90° вокруг центра квадрата (рис. *в*).

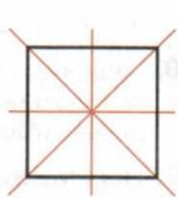
На рисунке *г* показано получение нового магического квадрата поворотом клеток вокруг центра на 90°.

На рисунке *д* показано получение нового магического квадрата после зеркального отражения относительно горизонтальной оси (числа в клетках записаны в привычном для прочтения виде).

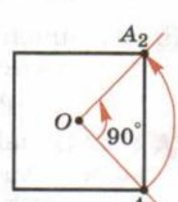
а)

6	1	8
7	5	3
2	9	4

б)



в)



г)

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	3	4
1	5	9
6	7	2

д)

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	9	4
7	5	3
6	1	8

С увеличением количества клеток в квадрате растёт число возможных магических квадратов. Например, число всевозможных магических квадратов размером 4×4 (с записью в его клетках чисел от 1 до 16 по оговорённым правилам) уже 880, а число магических квадратов 5×5 более 200 000. Пример магического квадрата размером 4×4 приведён на рисунке *е*.

е)

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

2. Латинские квадраты

Латинскими квадратами называют таблицы размером $n \times n$ клеток, в которых записаны натуральные числа от 1 до n, причём таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце встречаются все эти числа по одному разу.

На рисунке *ж* изображены два латинских квадрата 4×4, которые имеют особенность: если один наложить на другой (например, второй квадрат сделать из прозрачной бумаги и наложить на первый), то все пары образовавшихся двузначных чисел (рис. *з*) будут различными. Такие пары латинских квадратов называют *ортогональными*.

ж)

I

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

II

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

з)

11	22	33	44
23	14	41	32
34	43	12	21
42	31	24	13

Профессор, а задачи составления магических и латинских квадратов имеют хотя бы какое-то реальное применение?

Думаю, ты сам придумаешь, где и как можно использовать теорию, например, латинских квадратов после моего следующего рассказа.

и)

Впервые задачу построения латинских квадратов сформулировал Л. Эйлер, причём в такой форме: «Среди 36 офицеров 6 улан, 6 драгун, 6 гусар, 6 кирасир, 6 кавалергардов и 6 гренадёров. Кроме того, среди них поровну генералов, полковников, майоров, капитанов, поручиков и подпоручиков. При этом каждый род войск представлен офицерами всех шести рангов. Можно ли этих офицеров выстроить в каре 6×6 так, чтобы в любой колонне и в любой шеренге были офицеры всех рангов?»

Эйлер не смог решить эту задачу, а позднее, в 1901 г., математики доказали, что ортогональных латинских квадратов 6×6 не существует. И лишь в 1959 г. с помощью ЭВМ было обосновано, что для любого n, кроме 6, существуют ортогональные квадраты размером $n \times n$.

Да, есть над чем подумать. Профессор, а Вы обещали использовать наши знания для обоснования теории игровых задач комбинаторики. Может быть, мы сможем вывести какую-нибудь формулу посложнее, чем формула квадратного числа $(N = n^2)$?

Хорошо, сделаю подсказку, а вы с её помощью обоснуете *формулу* n-го по порядку *треугольного числа.*

На рисунке *и* изображены приложенные друг к другу два одинаковых n-х по порядку треугольных числа (одно выложено из чёрных камней, другое, «перевёрнутое», — из белых). С помощью этого рисунка несложно обосновать, почему n-е по порядку треугольное число находится по формуле $N_{\text{тр}} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

§ 39 Таблица вариантов и правило произведения

Для решения комбинаторных задач существуют разные средства, исключающие возможность потери какой-либо комбинации элементов. Для подсчёта числа комбинаций из двух элементов таким средством является таблица вариантов. С её помощью будет обосновано одно из важных правил подсчёта числа комбинаций из двух элементов — правило произведения.

Нужно вспомнить:

- составление таблиц «с двумя входами»;
- представление об игральном кубике (игральной кости).

Удобство использования **таблицы вариантов** для подсчёта различных комбинаций из двух элементов рассмотрим при решении задач.

Задача 1. Записать все возможные двузначные числа, используя при этом цифры: 1) 1, 2 и 3; 2) 0, 1, 2 и 3. Подсчитать их количество N.

► Для подсчёта образующихся чисел составим таблицы:

1-я цифра	2-я цифра		
	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

$N = 3 \cdot 3 = 9$

1-я цифра	2-я цифра			
	0	1	2	3
1	10	11	12	13
2	20	21	22	23
3	30	31	32	33

$N = 3 \cdot 4 = 12$

Ответ. 1) $N = 9$; 2) $N = 12$. ◁

Задача 2. Бросают две игральные кости (на рисунке 44 изображена игральная кость — кубик с отмеченными на его гранях очками, а также развёртка этого кубика). Сколько различных пар очков может появиться на верхних гранях костей?

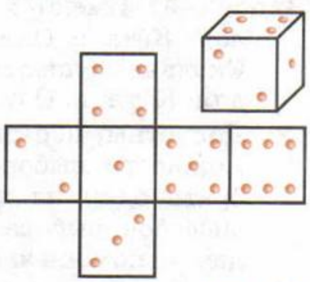


Рис. 44

▶ С помощью составленной таблицы пар выпавших очков можно утверждать, что число всевозможных пар равно $6 \cdot 6 = 36$.

Число очков на I кости	Число очков на II кости					
	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Ответ. 36 пар. ◁

Для решения задач, аналогичных задачам 1 и 2, можно пользоваться следующим правилом, которое получило в комбинаторике название «Правило произведения»:

! **Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них есть m вариантов выбора второго элемента, то всего существует $n \cdot m$ различных пар с выбранными первым и вторым элементами.**

Задача 3. Катя и Оля приходят в магазин, где продают в любом количестве плитки шоколада трёх видов. Каждая девочка покупает по одной плитке. Сколько существует способов покупки?

▶ Катя может купить плитку любого из трёх видов шоколада ($n = 3$). Оля может поступить аналогично ($m = 3$). Пару шоколадок для Кати и для Оли можно составить $n \cdot m = 3 \cdot 3 = 9$ различными способами.

Ответ. 9 способов. ◁

Задача 4. Имеются всего три плитки шоколада различных видов. Катя и Оля по очереди выбирают себе по одной плитке. Сколько существует различных способов выбора шоколадок для Кати и Оли?

▶ Допустим, первой шоколадку выбирает Катя. У неё есть 3 возможности выбора плитки ($n = 3$). После этого Оля может выбрать одну из двух оставшихся плиток ($m = 2$). Тогда число способов выбора пары шоколадок для Кати и для Оли найдём с помощью правила произведения: $n \cdot m = 3 \cdot 2 = 6$.

Ответ. 6 способов. ◁

Задача 5. Сколько существует различных двузначных кодов, составленных с помощью букв А, Б, В, Г и Д, если буквы в коде: 1) могут повторяться; 2) должны быть различными?

▶ 1) Первой буквой в коде может быть любая из данных пяти букв ($n=5$), второй — также любая из пяти ($m=5$). Согласно правилу произведения число всевозможных пар букв (с возможным их повторением в паре) равно $n \cdot m = 5 \cdot 5 = 25$.

2) Первой буквой в коде может быть любая из пяти букв ($n=5$), а второй — любая из четырёх, отличных от первой ($m=4$). Согласно правилу произведения, число двузначных кодов с различными буквами будет равно $n \cdot m = 5 \cdot 4 = 20$.

Ответ. 1) 25; 2) 20. ◁

Устные вопросы и задания

1. Сформулировать правило произведения.
2. Привести примеры применения правила произведения для подсчёта пар элементов.

Вводные упражнения

1. Заполнить таблицу значений функции $y=-0{,}5x+3$ при заданных значениях аргумента.

x	-4	0	2	8
$y=-0{,}5x+3$				

2. С помощью данных таблицы определить, сколько танцев на дискотеке станцевали: 1) Света с Колей; 2) Галя с Колей; 3) Галя с Витей; 4) Света с Витей.

Мальчики / Девочки	Коля	Витя
Света	3	2
Галя	1	0

3. Восстановить пропущенные данные в таблице результатов футбольных матчей среди команд A, B и C.

Команды	A	B	C
A		__ : 1	3 : __
B	__ : 2		__ : 2
C	0 : __	__ : 2	

Упражнения

700. Пользуясь таблицей вариантов, перечислить все двузначные числа, записанные с помощью цифр: 1) 3, 4, 5; 2) 7, 8, 9.

701. С помощью таблицы вариантов перечислить все возможные двухбуквенные коды (буквы в коде могут повторяться), в которых используются буквы: 1) а, б, в; 2) x, y, z.

702. Пользуясь таблицей вариантов, перечислить все двузначные числа, в записи которых используются цифры 7, 8, 9, 0, и подсчитать количество этих чисел.

703. Составляя расписание уроков на понедельник для 7А класса, завуч хочет первым уроком поставить либо физику, либо алгебру, а вторым — либо русский язык, либо литературу, либо историю. Сколько существует вариантов составления расписания на первые два урока?

704. Чтобы попасть из города A в город B, нужно по дороге доехать до реки, а затем переправиться на другой её берег. До реки можно доехать на мотоцикле, на автобусе, на автомобиле или дойти пешком. Через реку можно переправиться либо вплавь, либо переплыть на лодке, либо — на пароме. Сколько существует различных способов добраться из города A в город B?

705. У Светланы 3 юбки и 5 кофт, удачно сочетающихся по цвету. Сколько различных комбинаций из юбок и кофт имеется у Светланы?

706. На стол бросают 2 игральных тетраэдра (серый и белый), на гранях каждого из которых точками обозначены числа от 1 до 4 (рис. 45). Сколько различных пар чисел может появиться на гранях этих тетраэдров, соприкасающихся с поверхностью стола?

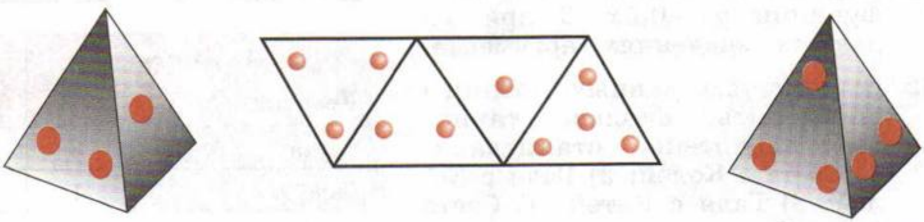


Рис. 45

707. В ларьке продаётся пять видов мороженого (не менее двух брикетов каждого вида). Оля и Таня покупают по одному брикету. Сколько существует вариантов такой покупки?

708. Мама решила сварить компот из фруктов двух видов. Сколько разных (по сочетанию видов фруктов) вариантов компотов может сварить мама, если у неё имеется 7 видов фруктов?

709. Из коробки, содержащей 8 мелков восьми различных цветов, Гена и Таня берут по одному мелку. Сколько существует различных вариантов такого выбора двух мелков?

710. Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе: 1) могут повторяться; 2) должны быть различными?

711. Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в числе: 1) могут повторяться; 2) должны быть различными?

Комбинаторика и анаграммы

Это интересно

Помните, я вам рассказывал, что Ф. Виет, будучи на службе у королей, расшифровал тайную переписку врагов?

Да, и ещё помним, что на жизнь он зарабатывал не математикой, а адвокатской деятельностью.

Математики, владеющие комбинаторикой, зачастую помогали политикам. Например, победа Кромвеля в гражданской войне в середине XVII в. была значительно упрощена раскрытием намерений монархистов. Помог Кромвелю в этом математик, разгадавший несложные шифры заговорщиков.

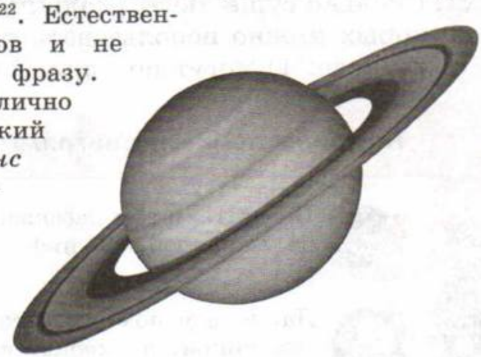
Ещё расскажу об одной очень любопытной традиции учёных XVI—XVIII вв. Учёные тех времён, сделав открытие, публиковали о нём сообщение или издавали книгу. Но если открытие не было достаточно проверено или обосновано, то публикация могла быть преждевременной и негативным образом отразиться на авторитете учёного. А если задержать публикацию, то реально было потерять первенство в открытии. Что оставалось делать авторам открытий?

Так вот, тогда многие учёные публиковали или сообщали своим коллегам информацию об открытии в виде *анаграммы*.

Из Интернета я узнала, что *анаграмма* — это перестановка букв, посредством которой из одного слова составляется другое. Значит, слова «сон» и «нос» — анаграммы?

Верно. Но если у слова «сон» вместе с ним существует всего 6 анаграмм (я считаю и слова, которые не имеют смысла в русском языке, например, слово «онс»), то у слова из 5 разных букв их уже 120.

Вернёмся к истории. В 1610 г. *Галилео Галилей (1564—1642)* с помощью построенного им телескопа наблюдал за Сатурном и заметил у него два спутника. Так как он не был уверен в своём открытии, то сообщил о нём анаграммой (фразой, не имеющей смысла), составленной из латинских букв предложения, в переводе на русский язык звучащего так: «Высочайшую планету тройною наблюдал». Если подсчитать все возможные анаграммы, составленные из букв этой фразы (часть из букв повторяется), то их получится около $7 \cdot 10^{22}$. Естественно, никто из современников и не пытался расшифровать эту фразу. Галилей позже сделал это публично сам. А через 50 лет голландский учёный *Христиан Гюйгенс (1629—1695)* с помощью мощного телескопа обнаружил кольцо Сатурна. Но история помнит по сей день, что именно Галилей первым обнаружил спутники Сатурна.



§ 40 Подсчёт вариантов с помощью графов

Существует немало способов организации перебора комбинаций из данных элементов. С одним из них (с помощью таблиц) вы только что познакомились. Однако с помощью таблиц удобно подсчитывать комбинации, составленные лишь из двух элементов. В том случае, когда нужно образовывать и подсчитывать комбинации из трёх и более элементов, часто пользуются наглядными схемами — графами.

Нужно вспомнить:

- представления о геометрических фигурах: точках, отрезках, многоугольниках и их элементах (вершинах, сторонах, диагоналях), многогранниках и их элементах (вершинах, рёбрах), окружностях;
- представление об упорядоченных и неупорядоченных комбинациях элементов;
- правило произведения.

Перебрать и подсчитать всевозможные комбинации из данных элементов несложно, когда их количество невелико. Однако уже

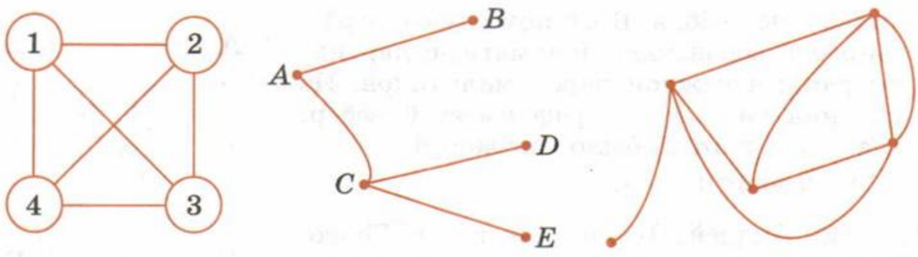


Рис. 46

при решении задачи 4 из § 38 таких комбинаций оказалось 27, и при переборе можно было упустить какую-нибудь из них. Нередко подсчёт вариантов облегчают **графы**. Так называют геометрические фигуры, состоящие из точек (их называют **вершинами**) и соединяющих их отрезков (называемых **рёбрами** графа). При этом с помощью вершин изображают элементы некоторого множества (предметов, людей, чисел и т. п.), а с помощью рёбер — определенные связи между этими элементами. Для удобства иллюстрации условия задачи с помощью графа его вершины-точки могут быть заменены, например кругами или прямоугольниками, а рёбра-отрезки — любыми линиями. Примеры различных графов приведены на рисунке 46. Генеалогическое древо, изображённое на рисунке 47, также является примером графа.

Рис. 47

1. Полный граф

Задача 1. Андрей, Борис, Виктор и Григорий играли в шахматы. Каждый сыграл с каждым по одной партии. Сколько партий было сыграно?

► Решим задачу с помощью так называемого **полного графа** с четырьмя вершинами А, Б, В, Г (рис. 48), обозначенными по первым буквам имён мальчиков. **В полном графе проводятся все**

возможные рёбра. В данном случае отрезки-рёбра обозначают шахматные партии, сыгранные каждой парой мальчиков. Из рисунка видно, что граф имеет 6 рёбер, значит, и партий было сыграно 6.

Ответ. 6 партий. ◁

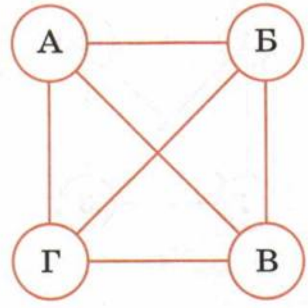


Рис. 48

Задача 2. Андрей, Борис, Виктор и Григорий после возвращения из спортивного лагеря подарили на память друг другу свои фотографии. Причём каждый мальчик подарил каждому по одной фотографии. Сколько всего фотографий было подарено?

▶ I способ. С помощью стрелок на рёбрах полного графа с вершинами А, Б, В и Г (рис. 49) показан процесс обмена фотографиями. Очевидно, стрелок в 2 раза больше, чем рёбер, т. е. $6 \cdot 2 = 12$. Столько же было подарено и фотографий.

II способ. Каждый из четырех мальчиков подарил друзьям 3 фотографии, следовательно, всего было роздано $3 \cdot 4 = 12$ фотографий.

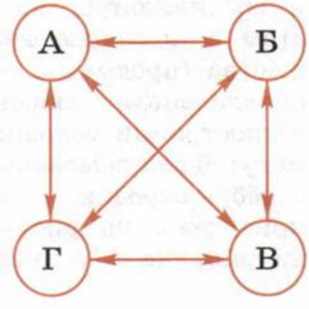


Рис. 49

Ответ. 12 фотографий. ◁

Задача 3. Сколько различных пар элементов (N), отличающихся лишь составом, можно образовать из n имеющихся различных элементов ($n > 2$)?

▶ Решим задачу с помощью полного графа, имеющего n вершин. Каждое ребро этого графа определяет искомую пару элементов. Из каждой вершины выходят $(n-1)$ рёбер. Число $(n-1) \cdot n$ в 2 раза больше, чем число рёбер, так как при таком подсчёте каждое ребро учитывается дважды. Следовательно, число искомых пар (рёбер графа)

$$N = \frac{(n-1)n}{2}. \qquad (1)$$

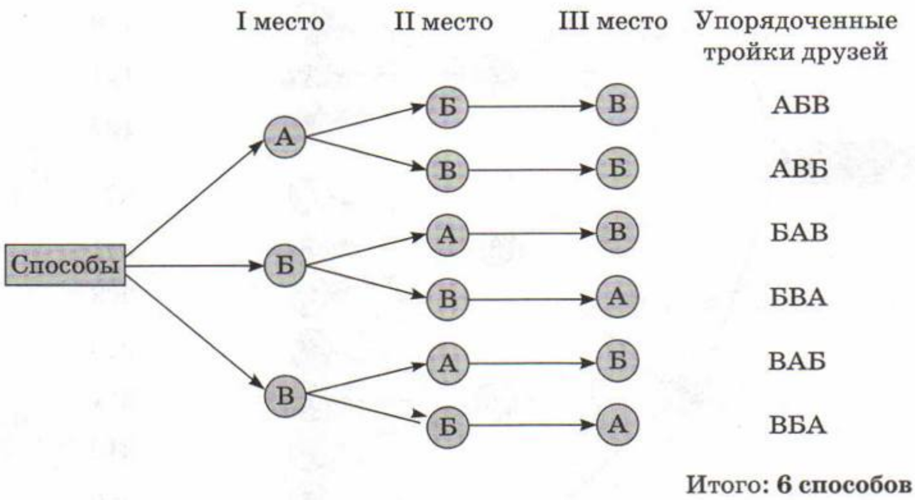
Ответ. $N = \frac{(n-1)n}{2}$. ◁

2. Граф-дерево

В § 38 решалась задача о способах рассаживания троих друзей на трёх местах во время футбольного матча. Рассмотрим составление всевозможных упорядоченных троек друзей с помощью графа, называемого **деревом** (за внешнее сходство с деревом).

Задача 4. Антон, Борис и Василий купили 3 билета на футбольный матч на 1, 2 и 3-е места первого ряда. Сколькими способами они могут занять имеющиеся три места?

► На 1-е место может сесть любой из троих друзей, на 2-е — любой из двоих оставшихся, а на 3-е — последний. Сказанное изобразим с помощью дерева, помещая в вершины графа первые буквы имён друзей А, Б и В:

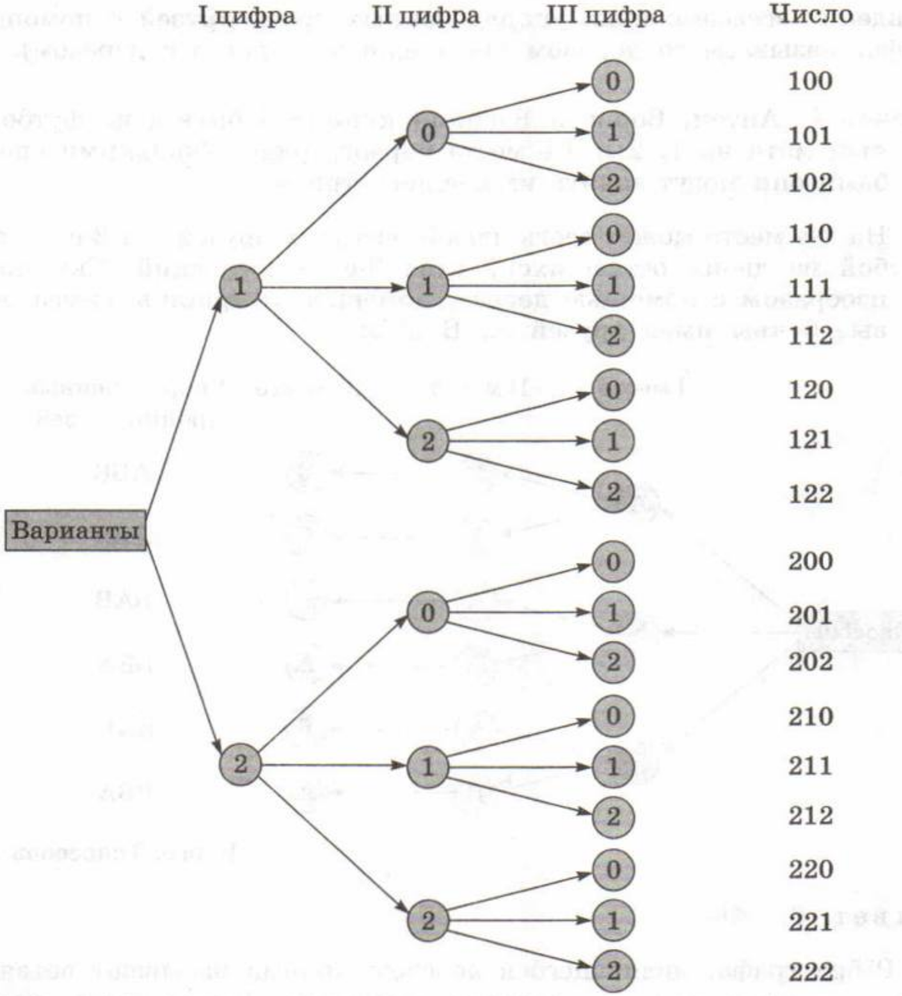


Ответ. 6. ◁

Рёбра графа, являющегося деревом, иногда называют ветвями дерева, а само дерево — **деревом вариантов**. Вычерчивать дерево полезно, когда требуется з а п и с а т ь все существующие комбинации элементов.

Задача 5. Сколько различных трёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, если цифры в числе могут повторяться?

► Первой цифрой составляемого трёхзначного числа может быть либо 1, либо 2. Второй цифрой может быть любая из трёх данных цифр; третьей — также любая из цифр 0, 1, 2. Изобразим сказанное с помощью дерева:



Ответ. 18 чисел. ◁

Дерево вариантов даёт наглядное представление о том, как применяется **правило произведения** для подсчёта комбинаций из большего, чем 2, числа элементов. Действительно, например, в задаче 5, согласно правилу произведения, первые две цифры числа можно было записать шестью способами ($2 \cdot 3 = 6$). Третью цифру к уже двум имеющимся можно было, согласно правилу произведения, приписать $(2 \cdot 3) \cdot 3 = 18$ способами, т. е. существует $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ всевозможных трёхзначных чисел, записанных с помощью цифр 0, 1 и 2.

Задача 6. В меню столовой предложены на выбор 3 первых, 5 вторых и 4 третьих блюда. Сколько различных вариантов обедов, состоящих из одного первого, одного второго и одного третьего блюда, можно составить из предложенного меню?

► Согласно правилу произведения, таких обедов можно составить $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$.

Ответ. 60 вариантов обедов. ◁

Задача 7. Антон, Борис, Виктор и Пётр купили 4 билета в театр на 1, 2, 3 и 4-е места первого ряда. Сколько существует различных способов, которыми мальчики могут занять эти места?

► Согласно правилу произведения, число таких способов равно $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Ответ. 24 способа. ◁

В задаче 7 с помощью правила произведения было найдено число всевозможных **перестановок** (см. § 38) из 4 элементов: $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. В комбинаторике число всевозможных перестановок из n элементов обозначают P_n (по первой букве французского слова *Permutation* — перестановка). Читается: «Число перестановок из эн элементов», или «пэ из эн».

Число всевозможных перестановок из n элементов находят (применив $n-1$ раз правило произведения) так:

$$P_n = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

После применения переместительного закона умножения эту формулу можно записать в виде:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)\, n. \qquad (1)$$

Произведение первых n натуральных чисел в математике обозначают $n!$ (читается «эн факториал»). Таким образом, $n! = 1 \cdot 2 \times \times 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)\, n$, поэтому формулу (1) часто записывают в виде:

$$P_n = n!$$

Принято считать, что $0! = 1$ и $1! = 1$.

Задача 8. Найти: 1) P_7; 2) $\frac{10!}{8!}$.

► 1) $P_7 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$;

2) $\frac{10!}{8!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 8} = 9 \cdot 10 = 90.$ ◁

Устные вопросы и задания

1. Что такое граф?
2. Назвать известные вам виды графов.
3. Привести пример применения правила произведения для подсчёта комбинаций из трёх; четырёх элементов.
4. Как найти число перестановок из n элементов?
5. Как обозначают произведение первых n натуральных чисел?

Вводные упражнения

1. Сколько существует различных двузначных чисел, записанных с помощью цифр 2, 4, 6, 8, если: 1) цифры в числе должны быть разными; 2) цифры в числе могут повторяться?
2. Сколько существует различных двузначных чисел, записанных с помощью цифр 0, 2, 4, 6, 8, если: 1) цифры в числе должны быть разными; 2) цифры в числе могут повторяться?

Упражнения

Упражнения **712—717** выполнить с помощью графов.

712. При встрече каждый из друзей пожал другому руку (каждый пожал каждому). Сколько рукопожатий было сделано, если друзей было: 1) трое; 2) четверо; 3) пятеро?

713. По окончании деловой встречи специалисты обменялись визитными карточками (каждый вручил свою карточку каждому). Сколько всего визитных карточек было роздано, если во встрече участвовали: 1) 3 человека; 2) 4 человека; 3) 5 человек?

714. Маше на день рождения подарили три букета цветов: из роз (р), астр (а) и гвоздик (г). В доме было две вазы: хрустальная (х) и керамическая (к). Маша пробовала устанавливать каждый букет в каждую вазу. Перечислить все полученные сочетания букета с вазой.

715. В каждую из трёх ваз: хрустальную (х), керамическую (к) и стеклянную (с) пробуют поставить по одному из двух имеющихся букетов цветов: из роз (р) и гвоздик (г). Перечислить все возможные варианты установки в каждую вазу каждого букета.

716. Перечислить все возможные варианты обедов из трёх блюд (одного первого, одного второго и одного третьего блюда), если в меню столовой имеются два первых блюда: щи (щ) и борщ (б); три вторых блюда: рыба (р), гуляш (г) и плов (п); два третьих: компот (к) и чай (ч).

717. Перечислить все возможные цветовые сочетания брюк, свитера и ботинок, если в гардеробе имеются брюки трёх цветов: серые (с), бежевые (б) и зеленые (з); свитера двух расцветок: песочный (п) и малиновый (м); ботинки двух цветов: чёрные (ч) и коричневые (к).

718. Сколько различных трёхзначных чисел можно записать с помощью цифр: 1) 1 и 2; 2) 0 и 1?

719. Сколько различных трёхзначных чисел, в записи которых цифры могут повторяться, можно записать с помощью цифр: 1) 1, 2, 3, 4; 2) 0, 1, 2, 3?

720. Сколько различных трёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 5, 6, 7, 8, 9 при условии, что цифры в числе: 1) могут повторяться; 2) должны быть различными?

721. Сколько различных трёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 6, 7, 8, 9, 0 при условии, что цифры в числе: 1) могут повторяться; 2) должны быть различными?

722. Вася забыл вторую и последнюю цифры пятизначного номера телефона приятеля. Какое наибольшее число звонков предстоит сделать Васе, если он решил перепробовать комбинации всех забытых цифр, чтобы в результате дозвониться до приятеля?

723. Имеется 6 видов овощей. Решено приготовить салат из 3 видов. Сколько различных (по сочетанию видов овощей) вариантов салатов можно приготовить?

724. Сколько существует способов занять 1, 2 и 3-е места на чемпионате по футболу, в котором участвуют: 1) 10 команд; 2) 11 команд?

725. При игре в крестики-нолики на поле размером 3×3 клетки неопытный первый игрок делает 1-й ход: ставит крестик в любую из клеток; вторым ходом второй неопытный игрок ставит нолик в любую из оставшихся свободных клеток, затем 3-м ходом первый игрок ставит крестик и т. д. Сколько существует вариантов заполненных клеток после: 1) двух ходов; 2) трёх ходов; 3) четырёх ходов?

726. 1) Завуч составляет расписание уроков. В пятницу в 7А классе должно быть 5 уроков, причём обязательно один сдвоенный урок — алгебра. Сколько различных вариантов расписания уроков может составить завуч на пятницу, если 3 оставшихся урока он комбинирует из литературы, истории и физики?

2) Имеется 7 книг, причем две из них одинаковые, а остальные книги отличаются от этих двух и различны между собой. Сколькими способами можно расставить эти книги на книжной полке при условии, что одинаковые книги в любой последовательности должны стоять рядом?

727. 1) Сколько различных шестизначных чисел, цифры в которых различны, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 и 6?

2) Сколько различных анаграмм можно составить из букв слова МЕТРО?

3) Найти: P_8; $\frac{P_{11}}{P_9}$; P_3+P_4; $\frac{P_8}{P_4}$.

728. Сколько рёбер имеет полный граф (каждая вершина соединена с каждой), если количество его вершин n, где: 1) $n=12$; 2) $n=37$?

729. Сколькими различными способами можно назначить двоих ребят на дежурство по столовой, если в классе: 1) 24 учащихся; 2) 25 учащихся?

Диалог об истории

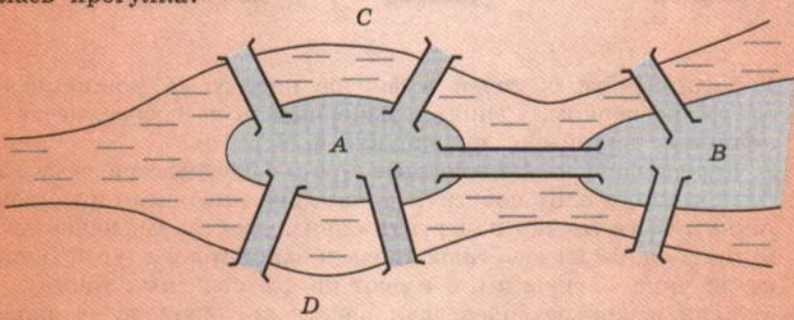
Прогулка по кёнигсбергским мостам

Мы с вами решали комбинаторные задачи с помощью несложных схем. С помощью графов решаются сложнейшие практические задачи в теории управления, социологии, математической лингвистике, экономике, биологии и во многих-многих сферах деятельности людей.

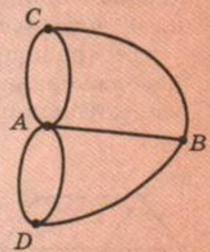
Существует теория графов. Она зародилась более 200 лет назад в ходе решения занимательных головоломок и комбинаторных задач. Её использовали для упрощения и наглядного представления различных проблем.

Основоположником теории графов считается Л. Эйлер, который в 1736 г. решил знаменитую *задачу о кёнигсбергских мостах*. Идеи Эйлера, реализованные при решении задачи, послужили основой теории, названной двести лет спустя *теорией графов*. Вот условие задачи, которую решил Эйлер.

Задача. В Кёнигсберге река Преголь, омывающая два острова, делится на два рукава, через которые перекинуты 7 мостов. Можно ли пройти по всем мостам так, чтобы на каждом из них побывать один раз и вернуться к тому месту, откуда началась прогулка?



Из условия задачи следует, что не имеет значения, как пролегает маршрут по частям суши A, B, C и D, поэтому их можно изобразить точками, а мосты — линиями, т. е. фактически *вершинами* и *рёбрами* графа (см. рис.). Если бы можно было совершить описанную в условии задачи прогулку, то этот граф можно было бы нарисовать *одним росчерком* — не отрывая карандаш от бумаги и проводя по каждому ребру только один раз.



Я попробовала «погулять» карандашом по мостам Кёнигсберга, но не смогла вернуться в ту же точку. А что получилось у Эйлера?

Эйлер доказал, что это невозможно. На самом деле невозможно побывать на каждом из этих мостов по одному разу, даже если не возвращаться в исходную точку.

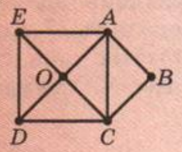
Профессор, а как узнать, какую фигуру-граф можно нарисовать *одним росчерком*, а какую нельзя?

Советую вам почитать популярные книги по теории графов и по *топологии*. Но если хотите, я могу коротко, без обоснований, ответить на вопрос.

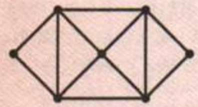
Договоримся называть точки, в которых сходится чётное число линий, *чётными*, а точки, в которых сходится нечётное число линий, — *нечётными*. Так, на рисунке *а*) точка O чётная, а точка D нечётная.

Теперь перечислю *признаки возможности вычерчивания фигур одним росчерком*:

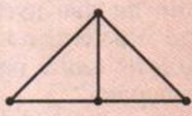
а)



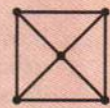
б)



в)



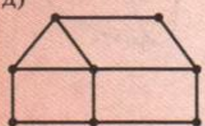
г)



1. Если нечётных точек в фигуре нет, то её можно начертить одним росчерком, начиная вычерчивать с любого места (такой является, например, на рисунке фигура *б*).
2. Если в фигуре две нечётные точки (оказывается, всегда, когда фигура имеет одну нечётную точку, она имеет и вторую нечётную точку), то её можно начертить одним росчерком, начав вычерчивание в одной из нечётных точек и закончив в другой (например, на рисунке фигуры *а* и *в* имеют по две нечётных точки).
3. Если в фигуре более двух нечётных точек, то её нельзя вычертить одним росчерком (например, на рисунке *г* фигура имеет 4 нечётные точки).

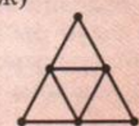
Теперь попробуйте самостоятельно определить, какие из фигур, изображённых на рисунках *д*) — *з*), можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя по одной линии дважды.

д)

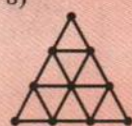


е)

ж)



з)



УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VIII

730. С помощью цифр 7, 8 и 9 записать все возможные двузначные числа, в которых цифры: 1) должны быть разными; 2) могут повторяться.

731. С помощью цифр 7, 8 и 9 записать все возможные трёхзначные числа при условии, что цифры в числе должны быть различными.

732. Перечислить все двузначные числа, в записи которых используются только цифры 8, 9 и 0, если: 1) одинаковых цифр в числе не должно быть; 2) цифры в числе могут повторяться.

733. 1) У лесника 3 собаки: Астра (А), Вега (В) и Гриф (Г). На охоту лесник решил пойти с двумя собаками. Перечислить все варианты выбора лесником пары собак.

2) Из трёх стаканов сока — ананасового (а), брусничного (б) и виноградного (в) — Иван решил последовательно выпить два. Перечислить все варианты, которыми это можно сделать.

734. Сколькими способами могут быть заняты первое, второе и третье призовые места (по одному человеку на место) на соревнованиях, в которых участвуют: 1) 5 человек; 2) 6 человек.

735. Сколько существует способов выбрать троих ребят из четверых, желающих дежурить по столовой?

ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Участники лыжных соревнований стартуют через равные интервалы. Предварительно они тянут жребий, определяющий стартовый номер. Сколько существует различных последовательностей выхода на старт, если в соревнованиях принимают участие: 1) 6 лыжников; 2) 8 лыжников?

2. Номера автомашин состоят из трёх любых цифр (не бывает только номера 000). Победителю автогонок дали право выбрать номер для своей машины. Из скольких номеров он может выбрать, если решит: 1) не брать номер, содержащий хотя бы одну цифру 2; 2) не брать номер, содержащий хотя бы одну из цифр 6 или 9?

3. Каждая из букв Л, О, Я, Г записаны на своей карточке. Маленькая девочка Оля из этих карточек составляет трёхбуквенные слова, выкладывая 3 карточки в ряд случайным образом. Какое наибольшее количество таких слов выложит Оля, прежде чем буквы образуют её имя?

4. В *азбуке Морзе*, которой пользуются для телеграфных сообщений, два знака — точка и тире. Каждая буква или цифра кодируется определённой комбинацией (последовательностью) точек и тире, но не более чем пятью знаками подряд. Какое максимальное число букв, цифр или других знаков можно закодировать с помощью *азбуки Морзе*?

5. Азбука для слепых, которую придумал французский тифлопедагог *Луи Брайль (1809—1852)*, — это рельефно-точечный шрифт, который легко осязается. В его основе — комбинации из 6 точек. Этими точками кодируются буквы, цифры, ноты и т. п. Сколько различных символов можно закодировать *азбукой Брайля*?

6. Разгадывая тайну генетического кода, американский учёный *Г. Гамов* поставил себе задачу: «Как с помощью 4 видов нуклеидов (*аденин*, *гуанин*, *тимин* и *цитозин*) можно закодировать 20 видов аминокислот?» Гамов кодировал первоначально аминокислоты *парами* нуклеидов (АА, АГ, АТ и т. д.). Хватило ли ему комбинаций таких пар для кодирования? Сколько видов мог закодировать Гамов, когда нуклеиды объединял тройками? Информация: чисто комбинаторные попытки разгадать тайну генетического кода оказались для учёных безуспешными.

7. Группу из 12 детей детского сада ежедневно выводят на прогулку парами. Сколько дней воспитатель может гулять с детьми так, чтобы ни в один из этих дней не было одинаковых по составу пар (считать, что все дни все дети посещают детский сад)?

8. В чемпионате по футболу, в котором участвуют 7 команд, разыгрываются 3 медали: золотая, серебряная и бронзовая. Перед началом игр болельщики пытались предугадать, как распределятся медали. Какое наибольшее число различных вариантов распределения медалей могли выдвинуть болельщики?

9. Найти число способов расставить 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они не могли бить друг друга.

10. Завершить составление магического квадрата (рис. 50):

1)

	5	3
		4

2)

9	5	
4		

Рис. 50

11. Завершить составление латинского квадрата (рис. 51):

1)

	2	
		1

2)

2		
	3	

3)

		2
1		

Рис. 51

В этой главе вы узнали,

что такое:

— комбинаторика; комбинаторные задачи;
— способы организованного перебора вариантов;
— средства подсчёта комбинаций из двух и более элементов (таблицы, графы);
— полный граф; граф-дерево;
— комбинаторное правило произведения;

как:

— рационально и без потери вариантов перебирать и подсчитывать комбинации из двух и более элементов (с помощью таблиц и графов);
— применять правило произведения для подсчёта комбинаций из различного числа элементов;
— решать прикладные комбинаторные задачи.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

1. С помощью цифр 8 и 9 записать все возможные двузначные числа, в которых цифры:
а) должны быть разными; б) могут повторяться.

2. Перечислить все трёхзначные числа, в записи которых встречаются только цифры 8 и 9.

3. Анна (А), Белла (Б) и Вера (В) купили билеты в кинотеатр на 1, 2 и 3-е места первого ряда. Перечислить все возможные способы, которыми девочки могут занять свои места.

II уровень

4. С помощью цифр 0, 1, 5 записать все возможные двузначные числа, в которых цифры:
а) должны быть разными; б) могут повторяться.
5. Сколько различных четырёхзначных чисел можно записать, используя цифры 0, 1 и 5?
6. При встрече каждый из друзей пожал каждому другу руку. Сколько было друзей, если было сделано 15 рукопожатий?

III уровень

7. Сколько различных пятизначных чисел можно записать, используя цифры 0, 1, 2, 3, 4?
8. Сколько рёбер имеет полный граф, у которого 25 вершин?
9. С помощью графа изобразить процесс разрезания листа бумаги сперва на три части, затем разрезания одной части пополам, второй части на 3 части и третьей — на 4 части. Сколько кусков бумаги образовалось после всех разрезаний?
10. Имеется 6 книг, среди которых две разные книги одного автора, а остальные книги — других различных авторов. Сколькими способами можно расставить в ряд эти книги так, чтобы книги одного автора (в любой последовательности) стояли рядом?

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Комбинаторные задачи в Древней Греции.
2. Комбинаторные задачи в странах Древнего Востока.
3. Блез Паскаль и его вклад в комбинаторику.
4. Леонард Эйлер как основоположник теории графов.
5. Шифры и анаграммы.
6. Комбинаторика в естественных науках.
7. Задачи на разрезание и раскрашивание.
8. Игра в 15.
9. Деревья и лес в теории графов.
10. Лабиринты.
11. Уникурсальные графы.
12. Задача четырёх красок.

Упражнения для повторения курса алгебры VII класса

736. Найти значение числового выражения:

1) $(-1,5+4-2,5)(-6)$; 2) $(2-3-7+7,9)^2$;

3) $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right):(-1,6-3,3+5)$; 4) $(2-5+7-1)^2:(-3)^2-21$;

5) $\dfrac{0,25-1\frac{1}{5}}{-3\frac{4}{5}+1,9}+\dfrac{10-2,5}{\frac{1}{2}-0,75}$; 6) $\dfrac{(0,2)^2+0,96}{4,5}+\dfrac{1}{9}$.

737. Сумма двух чисел равна 30. Одно из чисел a. Записать удвоенное произведение этих чисел. Вычислить значение этого произведения при $a=-2$.

738. Составить выражение, показывающее, сколько единиц содержится в натуральном числе, состоящем из a сотен, b десятков и c единиц. Сколько единиц в числе, написанном теми же цифрами, но в обратном порядке?

739. Сколько граммов содержат a килограммов и c граммов? Ответ записать выражением.

740. Найти числовое значение алгебраического выражения:

1) $\dfrac{2a+b}{b-2a}$ при $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-3$; 2) $\dfrac{4a^2-1}{2a+1}$ при $a=\dfrac{1}{2}$.

Решить уравнение **(741—744)**.

741. 1) $2(x-1)=3(2x-1)$; 2) $3(1-x)=4x-11$;
3) $3-5(x-1)=x-2$; 4) $3(x-2)-2(x-1)=17$.

742. 1) $\dfrac{2x+1}{3}=6$; 2) $\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{1}{4}$;

3) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{2}$; 4) $\dfrac{4}{3}x-1=\dfrac{x}{9}+\dfrac{1}{6}$.

743. 1) $7-\dfrac{x}{2}=3+\dfrac{7x}{2}$; 2) $9-\dfrac{2x}{3}=7+\dfrac{x}{3}$;

3) $\dfrac{x+3}{2}=x-4$; 4) $2-3x=\dfrac{x-12}{2}$.

744. 1) $\dfrac{6x+7}{7}+\dfrac{3+5x}{8}=3$; 2) $\dfrac{2x-4}{5}+\dfrac{2x-1}{3}=1$;

3) $5-\dfrac{2x-5}{3}=\dfrac{4x+2}{3}$; 4) $\dfrac{x-5}{5}=\dfrac{2x+1}{3}-7$.

745. В трёх коробках 119 карандашей. В первой коробке на 4 карандаша больше, чём во второй, и на 3 карандаша меньше, чем в третьей. Сколько карандашей в каждой коробке?

746. Отцу 30 лет, а сыну 4 года. Через сколько лет отец будет втрое старше сына?

747. Катер прошёл расстояние между двумя пристанями по течению реки за 3 ч, а против течения за 4 ч. Каково расстояние между этими пристанями, если скорость течения реки 2 км/ч?

748. Вертолёт пролетел расстояние между двумя посёлками при попутном ветре за 1,5 ч, а при встречном ветре за 2 ч. Каково расстояние между посёлками, если скорость ветра оба раза была равна 10 км/ч?

749. Упростить:

1) $\frac{5^3 \cdot 5^4 \cdot 5}{(5^2)^3}$; 2) $\frac{7^7}{(7^5)^2}$; 3) $\frac{(b^3)^2 b^3 b}{(b^2)^4} - b^2$;

4) $\frac{(3b^2)^2 9b^3}{3^4 b^6} + b$; 5) $\left(\frac{1}{m}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^2 m^5$; 6) $\left(\left(\frac{1}{a}\right)^4\right)^3 - \left(\frac{1}{a}\right)^{11} \cdot \frac{1}{a}$.

750. Найти произведение одночленов:

1) $-12a^4bc^2d \cdot 5a^3d^4 \cdot (-3b^3cd^2)$; 2) $49a^2bc^2 \cdot \left(-\frac{2}{7}ab\right) \cdot \frac{1}{14}ac$;

3) $\left(-\frac{2}{3}a^4b^2c\right) \cdot \frac{15}{2}abc^3$; 4) $\left(-\frac{4}{3}m^5n^3\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}mn^3\right)$.

751. Возвести одночлен в степень:

1) $(-2ab^2)^3$; 2) $(-0,8ac^2)^2$; 3) $\left(-\frac{3}{5}abc^3\right)^3$; 4) $\left(-\frac{1}{2}ab^2c^3\right)^4$.

752. Упростить выражение:

1) $2a^2 + 2ab + 3b^2 - a^2 - 2b^2$;

2) $a^2 + ab + b^2 + (2a^2 + 3ab - 2b^2) + (a^2 + ab + 2b^2)$;

3) $7a^2 + 2b^2 - (6a^2 + b^2)$; 4) $4a^2 + 2a + 1 - (1 + 2a - 4a^2)$.

753. Выполнить умножение многочлена на одночлен:

1) $(a^2 - ab + b^2) \cdot 3ab^3$; 2) $(2m^2 - 3mn + 4n^2) \cdot \frac{1}{12}m^2n^2$;

3) $(6a^3 - 4ab^2 + 1) \cdot \frac{1}{2}ab$; 4) $(8m^3 - 7m^2n + 1) \cdot \frac{1}{8}mn$.

754. Выполнить умножение многочленов:

1) $(a^2 + 3ab + b^2)(7a - 5b)$; 2) $(3a^2 - 6ab^2 + 2b^2)(4ab - 1)$;

3) $(a + 3b - 4c)(a - 3b - 4c)$; 4) $(m + n - 2)(m - n + 2)$;

5) $\left(\frac{1}{3}a^2b - \frac{2}{5}ab^2\right)(15a - 30b)$; 6) $\left(\frac{1}{2}a^2 + 4a + 1\right)(3a - 1)$.

755. Найти значение выражения:

1) $12a^2b^3:(3ab^2)$ при $a=\frac{3}{4}$; $b=\frac{1}{9}$;

2) $(-49m^3n^4):(7mn^4)$ при $m=\frac{1}{7}$, $n=1$;

3) $(4a^3b+6a^2b):(2ab^2)$ при $a=-1$, $b=5$;

4) $(12a^4-24a^3+12a^2):(6a^2)$ при $a=\frac{1}{4}$.

Упростить (756—757).

756. 1) $(a+1)(a-1)(a^2+1)$; 2) $(1-2b)(1+2b)(1+4b^2)$;

3) $(2ab^2+3)(3-2ab^2)+4a^2b^4$; 4) $\left(\frac{a}{2}-5\right)\left(5+\frac{a}{2}\right)+25$.

757. 1) $(a+3)^2+(a-3)^2$; 2) $(4a+b)^2-(4a-b)^2$; 3) $\left(2-\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a^2}{b^2}$.

758. Разложить на множители:

1) $a^4+6a^3+9a^2$; 2) $4+8b+4b^2$;

3) $(1-a)^2-4$; 4) $25-(2-3a)^2$.

759. Сократить дробь:

1) $\frac{a^2-16}{a^2-8a+16}$; 2) $\frac{4-a^2}{a+2}$; 3) $\frac{4x^2-9}{2x^2+3x}$; 4) $\frac{3b^2-12b+12}{b^2-4}$.

Выполнить действия (760—764).

760. 1) $\frac{a-b}{ab}-\frac{a-c}{ac}$; 2) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab^2}+\frac{1}{a^2b}$;

3) $\frac{1}{14x^3}-\frac{1}{21x^2y}-\frac{1}{4xy^2}$; 4) $\frac{2}{3x^2y}+\frac{3}{5xy^2}-\frac{5}{4y^3}$.

761. 1) $1+a-\frac{a-1}{a}+\frac{a^2-1}{2a}-\frac{3a}{2}$; 2) $\frac{a^2-3b^2}{ab^3}+\frac{2}{ab}+\frac{ab+b^2}{a^2b^2}$;

3) $\frac{a^2+5a-4}{16-a^2}+\frac{2a}{8a+2a^2}$; 4) $\frac{b}{9}-\frac{4b}{6b-36}+\frac{2}{3}-\frac{4}{6-b}$.

762. 1) $\frac{a}{a^2-1}-\frac{1}{1-a^2}$; 2) $\frac{3y}{4x^2-9y^2}+\frac{2x}{9y^2-4x^2}$;

3) $1+3a+\frac{9a^2}{1+3a}+\frac{1}{3a-1}+\frac{6a}{1-9a^2}$; 4) $\frac{m^2}{m^3-n^3}-\frac{mn}{n^3-m^3}+\frac{n^2}{m^3-n^3}$.

763. 1) $\frac{x^2-y^2}{6xy}\cdot\frac{12x^2y}{x+y}$; 2) $\frac{8ab-8b^2}{a^2+ab}\cdot\frac{a^3-ab^2}{4b^3}$;

3) $\frac{a^2+4a}{a^2-16}:\frac{4a+16}{a^2-4a}$; 4) $\frac{5a^3b+5ab^3}{a^4-b^4}:\frac{10ab}{3a^2-3b^2}$.

764. 1) $\frac{a^3+2a^2}{a^2-1}\cdot\frac{(a+1)^3(a-1)}{a^2(a+2)}$; 2) $\frac{1-81b^2}{a^2b^2-4}\cdot\frac{ab+2}{1-9b}$;

3) $\frac{(a^2+ab)^2}{a^2-b^2}:\frac{(a+b)^2}{(ab-b^2)^2}$; 4) $\frac{2cd+4d^2}{12c-6d}:\frac{4c^2-16d^2}{16c^2-4d^2}$.

Выполнить действия **(765—766).**

765. 1) $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{a}{a+1}\right)$; 2) $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{2a^2}{1-2a^2}\right)$;

3) $\frac{1-a^2}{1+b}\cdot\frac{1-b^2}{a+a^2}\cdot\left(1+\frac{a}{1-a}\right)$; 4) $\left(a+\frac{b-a}{1+ab}\right):\left(1-\frac{a(b-a)}{1+ab}\right)$.

766. 1) $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}-\frac{4y^2}{x^2-y^2}\right)\cdot\frac{x+y}{2y}$;

2) $\left(\frac{1-b}{1+b}-\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+4b}{1-b^2}\right)\cdot(b^2+2b+1)$.

767. Тело движется равномерно со скоростью 4 км/ч.

1) Написать формулу пути s этого тела за t часов.

2) Составить таблицу значений s при t, равном 0; 1; 2; 3; 4.

3) Построить график изменения пути данного тела в зависимости от изменения времени движения.

4) Найти по графику путь, пройденный телом за 1 ч 30 мин; за 3,5 ч.

5) Найти по графику, за какое время тело пройдёт 10 км; 6 км.

6) Доказать, что отношение ординаты любой точки полученного графика к её абсциссе равно 4.

768. Построить прямую:

1) $y=-3x+2$; 2) $y=3x-2$; 3) $y=\frac{1}{3}x+2$; 4) $y=-\frac{1}{3}x-2$;

5) $y=-2$; 6) $y=1$; 7) $x=-1$; 8) $x=3$.

769. Построить график функции $y=0{,}4x-8$ и по нему найти:

1) значение y, соответствующее значению x, равному -1; 0; 1; 2,5;

2) при каком значении x значение y равно -8; -2; 0; 0,5; 1,5; 4.

770. Найти координаты точек пересечения прямой с осями координат:

1) $y=7x+4$; 2) $y=-7x+4$;

3) $y=3{,}5x-1$; 4) $y=-3{,}5x+1$.

771. Построить график уравнения:

1) $2y+3=0$; 2) $1-3x=0$; 3) $x+y-1=0$;
4) $2x+y=3$; 5) $3y-2x=9$; 6) $2x=y-1$.

772. Найти координаты точки пересечения прямых:

1) $y=4x-6$ и $y=3x-2$; 2) $y=3x-1$ и $y=-\frac{5}{3}x+\frac{8}{3}$.

Решить систему уравнений **(773—774)**.

773. 1) $\begin{cases}2x-y=-6,\\x+2y=7;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-y-6=0,\\2x-3y+3=0;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+y=4,\\3x+y=0;\end{cases}$

4) $\begin{cases}2x-y=4,\\3x+y+9=0;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}3x+7y=13,\\8x-3y=13;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}3x-5y=6,\\-8y=3x+7.\end{cases}$

774. 1) $\begin{cases}\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=5,\\\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=0{,}5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\frac{2x}{3}-\frac{5y}{4}=-3,\\\frac{5x}{6}-\frac{7y}{8}=-1;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{x+y}{3}+y=9,\\\frac{x-y}{3}-x=-4;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\frac{x+y}{2}=\frac{1}{3},\\x-y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

775. Решить графически систему уравнений:

1) $\begin{cases}2x+5y=1,\\y=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=2,\\2x+y=0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x+2y=1,\\5x-2y=7;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}4x-5y-7=0,\\2x-8y+2=0.\end{cases}$

776. В первом баке в 4 раза больше жидкости, чем во втором. Когда из первого бака перелили 10 л жидкости во второй, оказалось, что во втором баке стало в 1,5 раза больше жидкости, чем осталось в первом баке. Сколько жидкости было в каждом баке первоначально?

777. За две пары гольф и три пары носков заплатили 360 р. Сколько стоит пара гольф и пара носков, если 1 пара гольф и 4 пары носков стоят 330 р.?

778. Если к числителю некоторой дроби прибавить 3, а знаменатель оставить без изменения, то получится 1; если к знаменателю исходной дроби прибавить 2, не меняя её числитель, то получится дробь, равная $\frac{1}{2}$. Найти исходную дробь.

779. Теплоход прошёл по реке расстояние между двумя пристанями, равное 80 км, за 3 ч 20 мин по течению реки и за 5 ч против течения. Найти скорость течения реки и собственную скорость теплохода.

780. Решить уравнение:

1) $\frac{4x-3}{2}-\frac{5-2x}{3}-\frac{3x-7}{6}=0;$ 2) $\frac{2x-3}{2}-\frac{3-4x}{4}-\frac{3-5x}{8}=0;$

3) $\frac{x+4}{5}-\frac{x+3}{3}=x-5-\frac{x-2}{2};$ 4) $\frac{5x}{6}-\frac{1-3x}{5}=x-\frac{x-7}{15}-1.$

781. Заводской цех должен был выполнить план по изготовлению однотипных деталей за 10 дней. Но уже за день до срока он не только выполнил задание, но и изготовил сверх плана 3 детали, так как ежедневно изготовлял сверх плана по 2 детали. Сколько деталей должен был изготовить заводской цех по плану?

782. Дана функция $y=kx+b$. При каких значениях k и b график функции проходит через точки $(-1;\ 1)$ и $(2;\ 3)$?

783. Найти значение k, если известно, что график функции $y=kx-1$ проходит через точку $(-3;\ 2)$.

784. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \frac{9x-y}{7}+2y=3, \\ \frac{12x+5y}{3}-3x=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{11x+3y}{9}-3x=-5, \\ \frac{14x-9y}{11}+5y=8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x+5y}{2}+\frac{11x-2y}{8}=\frac{2x-4y+6}{5}, \\ \frac{2x-3y}{7}-\frac{y-2x}{5}=\frac{2(9x+7y)}{11}. \end{cases}$

785. За 5 м шерсти и 4 м шёлка в магазине «Ткани» нужно заплатить 7300 р. При передаче остатков ткани в магазин по продаже мерного лоскута цену на шерсть снизили на 25%, на шёлк — на 15%, и в этом магазине за 6 м шерсти и 5 м шёлка нужно заплатить 7025 р. Сколько стоит метр шерсти и метр шёлка в магазине «Ткани»?

786. Сестра старше брата на 6 лет, а через год будет старше его в 2 раза. Сколько лет каждому из них?

787. Поезд прошёл расстояние 63 км между двумя станциями за 1 ч 15 мин. Часть пути он шёл под уклон со скоростью 42 км/ч, а остальную горизонтальную часть пути поезд шёл со скоростью 56 км/ч. Сколько километров пути уложено под уклон?

788. Дано выражение $(x^2-9)^2-(x+3)^2$.

1) Разложить данное выражение на множители.

2) При каких значениях x значение выражения равно нулю?

3) Записать данное выражение в виде многочлена стандартного вида.

4) Найти числовое значение выражения при $x=-3$, $x=3$.

5) Сократить дробь $\frac{(x^2-9)^2-(x+3)^2}{(x+3)^2}$.

789. 1) Разложить на множители каждое из выражений:

$$A=(2x-3)^2-(x+2)^2, \qquad B=(2x^2-2x)-10x+10.$$

2) При каких значениях x значение каждого выражения равно нулю?

3) Упростить дробь $\frac{A}{B}$. Вычислить значение этой дроби при $x=-\frac{1}{3}$, $x=-1$.

4) При каких значениях x значение этой дроби равно нулю?

790. 1) При каких значениях k и b график функции $y=kx+b$ проходит через точки $(-1;\ 1)$, $(2;\ -3)$?

2) Проходит ли график функции $y=-2x-1$ через точку $(-3;\ 5)$? $(-1;\ 2)$?

3) Построить график функции $y=-2x-1$. Найти координаты точек пересечения графика с осями координат.

4) При каком значении x значение функции $y=-2x-1$ равно нулю?

5) Указать несколько целых значений x, при которых значения функции $y=-2x-1$ положительны (отрицательны).

6) Найти координаты точки пересечения графика функции $y=-2x-1$ с графиком функции $y=5$.

791. Команда сейнера по плану должна была вылавливать 60 ц рыбы ежедневно. Перевыполняя план ежедневно на 5 ц, команда выполнила плановое задание на 3 дня раньше срока и, кроме того, выловила 20 ц рыбы сверх плана. Сколько рыбы должна была выловить команда сейнера по плану?

792. За 5 дней работы трактористы засеяли 500 га. Во 2-й день они засеяли на 25% больше, чем в 1-й, а в 3-й — на 20% больше, чем во 2-й. Последние два дня они засевали каждый день столько же, сколько во 2-й день. Сколько гектаров засеяли трактористы в 1-й день?

Упростить **(793—794)**.

793. 1) $(1-a)(1+a+a^2)+a^3$; 2) $(b+3)(b^2-3b+9)-27$;

3) $\left(\frac{1}{2}-c^2\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}c^2+c^4\right)+c^6$; 4) $\left(2a^2+\frac{1}{3}\right)\left(4a^4-\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{27}$.

794. 1) $(2a-b)^2-(2a-b)(2a+b)$; 2) $(1-a)^2(1+a)^2-(1-a^4)$;

3) $(2a+b)^2-9(a+b)^2$; 4) $(a-2b)^2-25(3a-b)^2$.

Разложить на множители **(795—797)**.

795. 1) $a^3b^6c^3-1$; 2) $8a^3b^3+125c^3$;

3) $(a-1)^2+2(a-1)+1$; 4) $(4a-1)^2+2(4a-1)+1$.

796. 1) $4ab^2+15abc-4bcd-15c^2d$; 2) m^3-m^2+m-1;

3) $a^2+b^2-c^2+2ab$; 4) $(a+3)^2-6(a+3)+9$;

5) $(m-1)(m^2-7m)+(m-1)(5m+1)$; 6) $1+2ab-a^2-b^2$.

797. 1) a^2-2a-3; 2) $b^2-7b+12$; 3) a^3+a^2-12;

4) x^3-7x+6; 5) $m^2-7m+10$; 6) m^2-m-2.

Выполнить действия **(798—800)**:

798. 1) $\left(m^2+\frac{1}{m^2}+2\right):\left(m+\frac{1}{m}\right)-\frac{m^3}{m^2-1}$;

2) $\frac{x^2+y^2}{x}:\left(x^3+\frac{y^4}{x}+2xy^2\right)-\frac{1}{x^2y^2}$.

799. 1) $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)$;

2) $\left(\frac{a+4b}{2b}-\frac{6b}{4b-a}\right)\cdot\left(1-\frac{a^2-2ab+4b^2}{a^2-4b^2}\right)$; 3) $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2-\left(\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)^2$.

800. 1) $\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)$;

2) $\left(\frac{2q}{p+2q}-\frac{4q^2}{p^2+4pq+4q^2}\right):\left(\frac{2q}{p^2-4q^2}+\frac{1}{2q-p}\right)$;

3) $\left(\frac{1}{1-a}-1\right):\left(a+\frac{1-2a^2}{1-a}+1\right);$

4) $\left(\frac{p}{p^2-4}+\frac{2}{2-p}+\frac{1}{p+2}\right):\left(p-2+\frac{10-p^2}{p+2}\right).$

801. Определить значение b, если через точку с координатами (3; 10) проходит график функции, заданной формулой:

1) $y=x+b$; 2) $y=3x+b$; 3) $y=-\frac{1}{3}x+b$; 4) $y=-\frac{1}{2}x+b$.

802. Задать формулой функцию, графиком которой является прямая, проходящая через точки A и B:

1) $A(-6;\ -3)$, $B(2;\ -3)$; 2) $A(-4;\ -4)$, $B(3;\ 3)$;
3) $A(2;\ 2)$, $B(0;\ 4)$; 4) $A(3;\ -8)$, $B(-5;\ 32)$.

803. Путь от фермы до города идёт сначала горизонтально, а затем в гору. Фермер проехал на велосипеде горизонтальную часть пути со скоростью 10 км/ч, в гору шёл пешком со скоростью 3 км/ч и прибыл в город через 1 ч 40 мин после выезда с фермы. Обратно он проехал путь под гору со скоростью 15 км/ч, а горизонтальную часть пути со скоростью 12 км/ч и прибыл на ферму через 58 мин после выезда из города. Сколько километров от фермы до города?

804. Велосипедист прибыл из пункта A в пункт B в назначенное время, двигаясь с определённой скоростью. Если бы он увеличил эту скорость на 3 км/ч, то прибыл бы к месту назначения на час раньше срока, а если бы он проезжал в час на 2 км меньше, чем в действительности, то он опоздал бы на час. Определить расстояние между A и B, скорость велосипедиста и время его движения.

805. Для содержания лошадей был сделан запас сена на некоторое время. Если бы лошадей было на две меньше, то этого запаса сена хватило бы еще на 10 дней; если бы лошадей было на две больше, то запаса сена не хватило бы на 6 дней. Сколько было лошадей и на сколько дней был сделан запас сена?

806. Первая труба наполняет бассейн за половину того времени, за которое вторая труба наполняет $\frac{2}{3}$ этого бассейна. Вторая труба, работая отдельно, наполняет бассейн на 6 ч дольше, чем одна первая труба. Сколько времени наполняет бассейн каждая труба отдельно?

СТАРИННЫЕ ЗАДАЧИ

807. *(Задача Диофанта.)* Ослица и мул шли бок о бок с тяжёлой поклажей на спине. Ослица жаловалась на свою непомерно тяжёлую ношу. «Чего ты жалуешься? — ответил ей мул. — Ведь если я возьму у тебя один мешок, ноша моя станет вдвое тяжелее твоей. А вот если бы ты сняла с моей спины один мешок, твоя поклажа стала бы одинакова с моей». Сколько мешков несла ослица и сколько нёс мул?

808. *(Индийская задача.)* Два лица имеют равные капиталы, причём каждый капитал состоит из известного числа вещей одинаковой ценности и известного числа монет. Как число вещей, так и суммы денег у каждого различны. Какова ценность вещи?

809. *(Задача Авиценны.)* Доказать, что если число, будучи разделено на 9, даёт в остатке 1 или 8, то квадрат этого числа, делённый на 9, даёт в остатке 1.

810. *(Задача из «Азбуки» Л. Н. Толстого.)* Пять братьев разделили после отца наследство поровну. В наследстве было три дома. Три дома нельзя было делить, их взяли старшие три брата. А меньшим за то выделили деньги. Каждый из старших заплатил по 800 рублей меньшим, и тогда у всех пяти братьев денег стало поровну. Много ли стоили дома?

(Старинные русские задачи.) **(811—813.)**

811. Мне теперь вдвое больше лет, чем было вам тогда, когда мне было столько лет, сколько вам теперь; а когда вам будет столько лет, сколько мне теперь, то нам будет обоим вместе 63 года. Сколько лет каждому?

812. У отца спросили, сколько лет его двум сыновьям. Отец ответил, что если к произведению чисел, означающих их года, прибавить сумму этих чисел, то будет 14. Сколько лет сыновьям?

813. Крестьянин менял зайцев на кур: брал за всяких двух зайцев по три курицы. Каждая курица снесла яйца — третью часть от числа всех куриц. Крестьянин, продавая яйца, брал за каждые 9 яиц по столько копеек, сколько каждая курица снесла яиц, и выручил 72 копейки. Сколько было кур и сколько зайцев?

Задачи повышенной трудности

814. Доказать, что разность $16^{11} - 2^{39}$ делится на 31.

815. Доказать, что сумма $333^{777} + 777^{333}$ делится на 37.

816. Найти последнюю цифру числа: 1) 2^{187}; 2) 3^{115}; 3) 7^{158}.

817. Найти последнюю цифру числа: 1) $32^{365} + 43^{241}$; 2) $27^{358} + 53^{275}$.

818. Доказать, что число $32^{365} + 43^{241}$ делится на 5.

819. Доказать, что число $132^2 + 576^3$ делится на 12.

820. Доказать, что число $10^{23} + 10^{19} - 182$ делится на 18.

821. Доказать, что значение выражения $n^3 + 11n$ делится на 6 при любом натуральном n.

822. Доказать, что при любом натуральном n:
1) значение выражения $n^3 + 3n^2 + 5n + 105$ делится на 3;
2) значение выражения $n^3 + 12n^2 + 23n$ делится на 6.

823. Доказать, что при любых натуральных m и n значение выражения $(3m + n + 5)^5(5m + 7n + 2)^4$ делится на 16.

824. Пусть m и n такие натуральные числа, что значение выражения $7m + 5n$ делится на 13. Доказать, что значение выражения $41m + 46n$ также делится на 13.

825. Вычислить сумму $S = \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 101} + \frac{1}{101 \cdot 103}$.

826. Вычислить сумму $S = \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{96 \cdot 98} + \frac{1}{98 \cdot 100}$.

827. Доказать, что ни при каких целых x и y равенство $x^2 - y^2 = 1990$ не является верным.

828. Найти все пары целых чисел x и y, при которых справедливо равенство:
1) $x^2 + 2x = y^2 + 6$; 2) $x^2 - 8 = y^2 + 4y$.

829. Найти все целые числа n, при которых дробь $\frac{n^5 + 3}{n^2 + 1}$ является целым числом.

830. Доказать, что при любых значениях x и y, не равных 0, значение выражения $x^2 - xy + \frac{2}{7}y^2$ положительно.

831. Упростить выражение

$$(3^{16}+1)(3^8+1)(3^4+1)(3^2+1)(3+1).$$

832. Доказать, что равенство $4x^2+9y^2-4x+6y+2=0$ является верным только при $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{3}$.

833. Доказать, что равенство $x^2+y^2+z^2=xy+xz+yz$ является верным только тогда, когда $x=y=z$.

834. Разложить на множители:
1) a^3+2a^2-3; 2) a^3+a^2+4;
3) a^5+a+1; 4) a^3-6a^2-a+30.

835. Разложить на множители:
1) a^4+2a^2-3; 2) a^4+4;
3) a^5+a^2-a-1; 4) $a^4-a^3-5a^2-a-6$.

836. Пусть $x+y=a$, $xy=b$. Выразить через a и b сумму:
1) x^2+y^2; 2) x^3+y^3; 3) x^4+y^4; 4) x^5+y^5.

837. Доказать, что если x, y, z положительны, то равенство $x^3+y^3+z^3=3xyz$ является верным только тогда, когда $x=y=z$.

838. Сократить дробь:
1) $\dfrac{a^2-a-2}{a^2-2a-3}$; 2) $\dfrac{a^3-a^2-a+1}{a^3+a^2-a-1}$;
3) $\dfrac{a^2+ab-6b^2}{a^2-ab-2b^2}$; 4) $\dfrac{2a^2-ab-b^2}{2a^2+3ab+b^2}$.

839. В 13 ч в бассейн начали наливать воду из одной трубы для того, чтобы заполнить его к 16 ч следующего дня. Через некоторое время включили ещё одну такую же трубу, так как потребовалось заполнить бассейн к 12 ч дня. Во сколько часов включили вторую трубу?

840. Товарный поезд проехал мимо заводского корпуса длиной 100 м за 20 с, а мимо забора длиной 900 м — за 1 мин. Каковы длина поезда и его скорость?

841. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Спустя 1 ч 24 мин в том же направлении из A выехал велосипедист, и через час он был на расстоянии 1 км позади пешехода, а ещё через час велосипедисту оставалось до B расстояние, вдвое меньшее, чем пешеходу. Найти скорости пешехода и велосипедиста, если известно, что расстояние AB равно 27 км.

842. Из пункта A вышел пешеход, а из пункта B навстречу ему одновременно выехал велосипедист. После их встречи пешеход продолжал идти в B, а велосипедист повернул назад и тоже поехал в B. Известно, что пешеход прибыл в B на 2 ч позже велосипедиста, а скорость пешехода в 3 раза меньше скорости велосипедиста. Сколько времени прошло от начала движения до встречи пешехода и велосипедиста?

843. Пловец плывёт против течения реки и встречает плывущую по течению реки пустую лодку. Продолжая плыть против течения еще t секунд после момента встречи, он затем поворачивает назад и догоняет лодку в s метрах от места встречи. Найти скорость течения реки.

844. В колбе имеется раствор поваренной соли. Из колбы в пробирку отливают пятую часть раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на 3%. Определить исходное процентное содержание соли.

845. Дорога из пункта A в пункт B длиной 11,5 км идёт сначала в гору, затем по равнине и, наконец, под гору. Пешеход путь от A до B и обратно от B до A прошёл за 6 ч. Скорость его ходьбы в гору была 3 км/ч, по равнине — 4 км/ч, а под гору — 5 км/ч. Сколько километров составляет та часть дороги, которая идёт по равнине?

846. Два автомобилиста проехали по 240 км. Первый половину всего пути делал остановки через каждые 4 км, а другую половину — через каждые 5 км. Второй четверть всего пути делал остановки через каждые 3 км, а оставшуюся часть — через каждые 6 км. Какой автомобилист сделал остановок больше?

847. Двое учащихся на одинаковую сумму денег купили тетради: тонкие по a рублей за тетрадь и толстые по b рублей за тетрадь. Первый из них половину своих денег истратил на тонкие тетради и половину — на толстые. Второй купил на свои деньги тех и других тетрадей поровну. Кто из них купил большее число тетрадей?

848. Два автобуса отправились одновременно из одного города в другой по одной и той же дороге. Первый двигался с постоянной скоростью 60 км/ч. Второй половину всего пути двигался со скоростью 50 км/ч, а остальную часть пути — со скоростью 70 км/ч. Какой из автобусов первым прибыл во второй город?

849. На соревнованиях два велосипедиста стартовали одновременно. Первый ехал всю дистанцию с постоянной скоростью. Второй первую половину дистанции ехал в полтора раза быстрее, а вторую — в два раза медленнее первого. Кто из них выиграл гонку?

850. На соревнованиях по спортивной ходьбе первый спортсмен прошёл четверть всей дистанции со скоростью 12 км/ч, а остальную часть — со скоростью 8 км/ч. Второй спортсмен прошёл половину дистанции со скоростью 10 км/ч, а остальную часть — со скоростью 9 км/ч. Кто из них был первым на финише?

851. Два пешехода прошли одинаковый путь. Первый половину всего пути шёл со скоростью 5 км/ч, а оставшуюся часть пути — со скоростью 3 км/ч. Второй пешеход половину всего затраченного времени шёл со скоростью 5 км/ч, а остальное время — со скоростью 3 км/ч. Кто из них быстрее прошёл весь путь?

Рекомендуемая литература к курсу алгебры 7—9 классов

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

1. Белл Э. Т. Творцы математики / Э. Т. Белл. — М.: Просвещение, 1979 или на сайте http://ilib.mirror1.mccme.ru/
2. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Г. Вилейтнер. — М.: Физматлит, 1960 или на сайте http://ilib.mirror1.mccme.ru/
3. Глейзер Г. И. История математики в школе: IV—VI кл.: пособие для учителей / Г. И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1981.
4. Дорофеева А. В. Страницы истории на уроках математики / А. В. Дорофеева // Журнал «Квантор». — Львов, 1991.
5. История математики. Том I. С древнейших времён до начала Нового времени / под ред. А. П. Юшкевича. — М.: Наука, 1970 или на сайте http://ilib.mirror1.mccme.ru/
6. История математики. Том II. Математика XVII столетия / под ред. А. П. Юшкевича. — М.: Наука, 1970 или на сайте http://ilib.mirror1.mccme.ru/
7. История математики. Том III. Математика XVIII столетия / под ред. А. П. Юшкевича. — М.: Наука, 1972 или на сайте http://ilib.mirror1.mccme.ru/
8. Матвиевская Г. П. Рене Декарт / Г. П. Матвиевская. — М.: Просвещение, 1987 или на сайте http://ilib.mirror1.mccme.ru/
9. Пичурин Л. Ф. За страницами учебника алгебры: кн. для учащихся 7—9 кл. сред. шк. / Л. Ф. Пичурин. — М.: Просвещение, 1990.
10. Рыбников К. А. Возникновение и развитие математической науки: кн. для учителя / К. А. Рыбников. — М.: Просвещение, 1987.
11. Цейтен И. Г. История математики в древности и в Средние века: пер. с франц. / под ред. А. П. Юшкевича / И. Г. Цейтен. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Березина Л. Ю. Графы и их применение / Л. Ю. Березина. — М.: Просвещение, 1979.
2. Воробьёв Н. Н. Брошюры серии «Популярные лекции по математике»: Признаки делимости / Н. Н. Воробьёв. — Вып. 39. — М.: Наука, 1988 или на сайте http://ilib.mirror1.mccme.ru/

3. Воробьёв Н. Н. Брошюры серии «Популярные лекции по математике»: Числа Фибоначчи / Н. Н. Воробьёв. — Вып. 6. — М.: Наука, 1978 или на сайте http://ilib.mirror1.mccme.ru/
4. Гашков С. Б. Примени математику / С. Б. Гашков, С. Н. Олехник, С. Б. Сергеев. — М.: Наука, 1989.
5. Доморяд А. П. Математические игры и развлечения / А. П. Доморяд. — М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1961.
6. Перельман Я. И. Занимательная алгебра / Я. И. Перельман. — М.: Наука, 1975 или на сайте http://ilib.mirror1.mccme.ru/
7. Савин А. П. Энциклопедический словарь юного математика / сост. А. П. Савин. — М.: Педагогика, 1989.
8. Халамайзер А. Я. Комбинаторика и бином Ньютона: пособие для учащихся 9—10 кл. / А. Я. Халамайзер. — М.: Просвещение, 1980.
9. Чуянов В. А. Энциклопедический словарь юного физика / сост. В. А. Чуянов. — М.: Педагогика, 1991.
10. Яглом И. М. Брошюры серии «Популярные лекции по математике»: Необыкновенная алгебра / И. М. Яглом. — Вып. 45. — М.: Наука, 1968 или на сайте http://ilib.mirror1.mccme.ru/

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

1. Кордемский Б. А. Математическая смекалка / Б. А. Кордемский. — М.: Наука, 1991.
2. Нестеренко Ю. В. Старинные занимательные задачи / Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов. — М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.
3. Фарков А. В. Математические олимпиадные работы. 5—11 классы / А. В. Фарков. — СПб.: Питер, 2010.
4. Фридман Л. М. Как научиться решать задачи: кн. для учащихся 9—10 кл. / Л. М. Фридман. — М.: Просвещение, 2005.
5. Ченцов Н. Н. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра / Н. Н. Ченцов, Д. О. Шклярский, И. М. Яглом. — М.: Наука, 2001 или на сайте http://ilib.mirror1.mccme.ru/
6. Чистяков В. Д. Сборник старинных задач по элементарной математике с историческими экскурсами и подробными решениями / В. Д. Чистяков. — Минск: Изд-во мин. высш., средн. спец. и проф. обр., 1962 или на сайте http://ilib.mirror1.mccme.ru/

Краткое содержание курса математики V—VI классов

1. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Для счёта предметов применяют *натуральные* числа: 1, 2, 3, 4, ... Нуль *не относят* к натуральным числам. Любое натуральное число можно записать с помощью десяти *цифр*: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Число 4350 содержит 4 тысячи, 3 сотни, 5 десятков и 0 единиц.

ДЕЙСТВИЯ С ЧИСЛАМИ

Сложение. Числа, которые складывают, называют *слагаемыми*; число, получающееся при сложении этих чисел, называют их *суммой*. Например, в записи $a+b=c$ числа a и b — слагаемые, число c — сумма.

От прибавления нуля число *не изменяется*: $a+0=a$.

Представление числа 7501 в виде суммы $7000+500+1$ называют *разложением этого числа по разрядам.*

Вычитание. Действие, с помощью которого по сумме и одному из слагаемых находят другое слагаемое, называют *вычитанием*. Число, из которого вычитают, называют *уменьшаемым*, а число, которое вычитают, — *вычитаемым*. Результат вычитания называют *разностью*. Например, в записи $a-b=c$ число a — уменьшаемое, b — вычитаемое, c — разность.

Если из числа *вычесть нуль*, оно *не изменится*: $a-0=a$.

Если из числа вычесть это же число, получится нуль: $a-a=0$.

Умножение. *Умножить* число m на натуральное число n — значит найти *сумму* n слагаемых, каждое из которых равно m. Числа, которые перемножаются, называют *множителями*, а результат действия умножения — *произведением*.

Например, в записи $m \cdot n=p$ числа m и n — множители, p — произведение.

При умножении любого числа на нуль получается нуль: $a \cdot 0=0$.

Деление. Действие, с помощью которого по произведению и одному из множителей находят другой множитель, называют *делением*. Число, которое делят, называют *делимым*; число, на которое делят, называют *делителем*, результат деления называют *частным*. Например, в записи $p:n=m$ число p — делимое, n — делитель, m — частное. Ни одно число *нельзя делить на нуль.*

Чтобы найти *неизвестное делимое при делении с остатком*, нужно умножить *неполное частное* на делитель и к полученному произведению прибавить остаток.

Например, если $x : 6 = 53$ и 5 в остатке, то $x = 6 \cdot 53 + 5$, т. е. $x = 323$.

Остаток всегда *меньше* делителя.

Например, при делении на 6 в остатке может быть одно из чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

На число 10 без остатка делится всякое натуральное число, запись которого оканчивается цифрой 0.

На 5 без остатка делится всякое натуральное число, оканчивающееся цифрой 0 или 5.

На 3 делится число, сумма цифр которого делится на 3.

На 9 делится число, сумма цифр которого делится на 9.

ДЕЛИТЕЛИ И КРАТНОЕ

Делителем натурального числа a называют натуральное число, на которое a делится без остатка. Например, делителями числа 12 являются числа 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Натуральное число называют *простым*, если оно имеет только два делителя: единицу и само это число. Например, числа 2, 3, 7, 11, 31 — простые числа.

Натуральное число называют *составным*, если оно имеет более двух делителей. Например, числа 8, 15, 102, 1000 — составные.

Число 1 имеет один делитель — само это число. Поэтому его не относят *ни к простым, ни к составным числам.*

Наибольшее натуральное число, на которое делятся без остатка числа a и b, называют *наибольшим общим делителем (НОД) этих чисел.*

Например, НОД чисел 12 и 18 является число 6. Записывают: НОД(12, 18) = 6.

Натуральные числа называют *взаимно простыми*, если их наибольший общий делитель равен 1. Например, взаимно простыми являются числа 10 и 3; 91 и 92.

Чтобы *найти наибольший общий делитель* нескольких натуральных чисел, нужно:

1) разложить каждое из них на простые множители;
2) из множителей, входящих в разложение одного из данных чисел, отбросить те, которые не входят в разложение других чисел;

3) найти произведение оставшихся множителей.

Например, $НОД(30, 45, 75) = 3 \cdot 5 = 15$, так как $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$, $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$.

Кратным натурального числа a называют натуральное число, которое делится без остатка на a. Например, числа 12, 24, 36, 48, ... являются кратными числа 12.

Наименьшим общим кратным (НОК) натуральных чисел a и b называют наименьшее натуральное число, которое кратно и a, и b. Например, число 36 является наименьшим общим кратным чисел 12 и 18. Записывают: $НОК(12, 18) = 36$.

Чтобы *найти наименьшее общее кратное* нескольких натуральных чисел, нужно:

1) разложить каждое из них на простые множители;
2) выписать множители, входящие в разложение одного из данных чисел;
3) добавить к ним недостающие множители из разложений остальных чисел;
4) найти произведение получившихся множителей.

Например, $НОК(30, 25, 9) = \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 5}_{30} \cdot \underline{5} \cdot \underline{\underline{3}} = 450$, так как $30 = 2 \times$ $\times 3 \cdot 5$, $25 = 5 \cdot \underline{5}$, $9 = 3 \cdot \underline{\underline{3}}$.

2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

ДОЛИ И ДРОБИ

При делении целого числа на равные части получаются *доли*. Долю $\frac{1}{2}$ называют половиной; $\frac{1}{3}$ — третью; $\frac{1}{4}$ — четвертью.

Запись вида $\frac{3}{8}$ называют *обыкновенной дробью*. Число 3 здесь называют *числителем*, а число 8 — *знаменателем* дроби. Знаменатель показывает, на сколько равных долей делят целое, а числитель — сколько таких долей взято.

Любое *натуральное* число можно записать в виде дроби со знаменателем 1. Например, $5 = \frac{5}{1}$, $13 = \frac{13}{1}$.

Дробь, у которой числитель меньше знаменателя, называют *правильной дробью*. Например, дробь $\frac{2}{7}$ — правильная.

Дробь, у которой числитель больше знаменателя или равен ему, называют *неправильной дробью*. Например, дроби $\frac{8}{5}$, $\frac{9}{9}$ — неправильные.

Неправильную дробь, у которой числитель больше знаменателя, можно записать в виде *смешанного числа (смешанной дроби)*. Для этого из неправильной дроби нужно *выделить целую часть*.

Например, $\frac{37}{5} = 7\frac{2}{5}$, так как $37 = 5 \cdot 7 + 2$.

Смешанное число можно представить в виде неправильной дроби: $2\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{7}{3}$.

СРАВНЕНИЕ ДРОБЕЙ

Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель дроби *умножить* или *разделить* на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной.

Например, $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}$; $\frac{12}{18} = \frac{12:2}{18:2} = \frac{6}{9}$.

Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой больше числитель, и меньше та, у которой меньше числитель.

Например, $\frac{7}{12} > \frac{5}{12}$; $\frac{5}{12} < \frac{7}{12}$.

Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой меньше знаменатель, и меньше та, у которой больше знаменатель.

Например, $\frac{7}{12} > \frac{7}{17}$; $\frac{7}{17} < \frac{7}{12}$.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ С ОБЫКНОВЕННЫМИ ДРОБЯМИ

При сложении (вычитании) дробей с одинаковыми знаменателями числители складывают (вычитают), а знаменатель оставляют тем же.

Например, $\frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$; $\frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Чтобы *привести дроби к наименьшему общему знаменателю*, нужно:

1) найти наименьшее общее кратное знаменателей данных дробей, оно и будет их наименьшим общим знаменателем;
2) найти для каждой дроби дополнительный множитель, выполняя деление наименьшего общего знаменателя на знаменатели данных дробей;
3) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на её дополнительный множитель.

Например, $\frac{2^{(2}}{15} = \frac{4}{30}$, $\frac{3^{(3}}{10} = \frac{9}{30}$, так как НОК$(15, 10) = 30$.

Чтобы *сравнить (сложить, вычесть) дроби с разными знаменателями*, нужно:
1) привести данные дроби к общему знаменателю;
2) сравнить (сложить, вычесть) полученные дроби.

Чтобы *сложить смешанные числа*, нужно:
1) привести дробные части этих чисел к общему знаменателю;
2) отдельно выполнить сложение целых частей и отдельно дробных частей;
3) если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, выделить целую часть из этой дроби и прибавить её к полученной целой части.

Например, $3\frac{11}{15} + 5\frac{7}{18} = 3\frac{66}{90} + 5\frac{35}{90} = 8 + \frac{101}{90} = 8 + 1\frac{11}{90} = 9\frac{11}{90}$.

Чтобы *выполнить вычитание смешанных чисел*, нужно:
1) привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю; если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, превратить её в неправильную дробь, уменьшив на единицу целую часть;
2) отдельно выполнить вычитание целых частей и отдельно дробных частей.

Например, $7\frac{3}{11} - 4\frac{5}{7} = 7\frac{21}{77} - 4\frac{55}{77} = 6\frac{98}{77} - 4\frac{55}{77} = 2\frac{43}{77}$.

Чтобы *умножить дробь на дробь*, нужно:
1) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей;
2) первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем.

Например, $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{12}{35}$; $\frac{21}{44} \cdot 8 = \frac{21}{44} \cdot \frac{8}{1} = \frac{21 \cdot 8}{44} = \frac{21 \cdot 2}{11} = \frac{42}{11} = 3\frac{9}{11}$.

Чтобы *выполнить умножение смешанных чисел*, нужно их записать в виде неправильных дробей, а затем воспользоваться правилом умножения дробей.

Например, $1\frac{7}{8} \cdot 3\frac{3}{5} = \frac{15}{8} \cdot \frac{18}{5} = \frac{15 \cdot 18}{8 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 9}{4} = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$.

Чтобы *найти дробь от числа*, нужно умножить число на эту дробь. Например, $\frac{2}{3}$ от числа 150 равны 100, так как $150 \cdot \frac{2}{3} = 100$.

Два числа, произведение которых равно 1, называют *взаимно обратными*. Например, взаимно обратными являются числа $\frac{2}{3}$ и

$1\frac{1}{2}$, так как $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ и $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$; числа 7 и $\frac{1}{7}$ — взаимно обратные, так как $7\cdot\frac{1}{7}=1$.

Чтобы *разделить одну дробь на другую*, нужно делимое умножить на число, обратное делителю.

Например, $\frac{15}{17}:\frac{5}{34}=\frac{15}{17}\cdot\frac{34}{5}=\frac{15\cdot 34}{17\cdot 5}=6$.

Чтобы *найти число по данному значению его дроби*, нужно это значение разделить на дробь.

Например, если $\frac{2}{3}$ некоторого числа составляют 84, то само число равно $84:\frac{2}{3}=84\cdot\frac{3}{2}=\frac{84\cdot 3}{2}=42\cdot 3=126$.

3. ОТНОШЕНИЯ И ПРОПОРЦИИ

Частное двух чисел часто называют *отношением* этих чисел. Отношение двух чисел показывает, во сколько раз первое число больше второго или какую часть первое число составляет от второго.

Например, отношение $\frac{6}{3}$ (или 6 : 3) показывает, что первое число 6 в 2 раза больше второго числа 3; отношение $\frac{3}{15}$ (или 3 : 15) показывает, что первое число 3 составляет $\frac{1}{5}$ часть от второго.

Если *значения двух величин выражены одной и той же единицей измерения*, то их отношение также называют отношением этих величин (например, отношением длин, отношением масс, отношением площадей и т. д.).

Равенство двух отношений называют *пропорцией*.

Пропорцию записывают в виде $a:b=c:d$ или $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

В пропорции $a:b=c:d$ числа a и d называют *крайними членами*, а числа b и c — *средними членами* пропорции.

В пропорции $a:b=c:d$ произведение крайних членов равно произведению средних: $ad=bc$. Это свойство называют *основным свойством пропорции*.

Например, в пропорции $\frac{2}{7}=\frac{4}{14}$ имеем $2\cdot 14=4\cdot 7$.

Используя основное свойство пропорции, можно найти её неизвестный член, если остальные члены известны.

Например, если $\frac{x}{16}=\frac{7}{32}$, то $x\cdot 32=7\cdot 16$, откуда $x=\frac{7\cdot 16}{32}$, $x=3\frac{1}{2}$.

4. ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Любое число, знаменатель дробной части которого выражается единицей с одним или несколькими нулями, можно представить в виде *десятичной дроби*. Например, $\frac{3}{10}=0{,}3$, $\frac{3}{20}=\frac{15}{100}=0{,}15$, $7\frac{8}{1000}=7{,}008$. Если в конце десятичной дроби приписать нуль или отбросить последний нуль, то получится дробь, равная данной. Например, $0{,}650=0{,}65$, $3{,}755=3{,}7550$.

Правило округления десятичных дробей:

1) Если первая из отброшенных цифр равна 5, 6, 7, 8 или 9, то стоящую перед ней цифру увеличивают на 1. Например, $3{,}751\approx 3{,}8$, так как первая отброшенная цифра 5.
2) Если первая из отброшенных цифр равна 0, 1, 2, 3 или 4, то стоящую перед ней цифру оставляют без изменения. Например, $3{,}751\approx 3{,}75$, так как первая отброшенная цифра 1.

ДЕЙСТВИЯ С ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

Чтобы *сложить (вычесть) десятичные дроби*, нужно:

1) уравнять в этих дробях количество знаков после запятой;
2) записать их друг под другом так, чтобы запятая была записана под запятой;
3) выполнить сложение (вычитание), не обращая внимания на запятую;
4) поставить в ответе запятую под запятой в данных дробях.

Например, $5{,}741+3{,}02=5{,}741+3{,}020=8{,}761$, так как $\begin{array}{r} 5{,}741 \\ +\,3{,}020 \\ \hline 8{,}761 \end{array}$,

$10{,}04-8{,}532=10{,}040-8{,}532=1{,}508$, так как $\begin{array}{r} 10{,}040 \\ -\,8{,}532 \\ \hline 1{,}508 \end{array}$.

Чтобы *умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000* и т. д., нужно в этой дроби перенести запятую на столько цифр вправо, сколько нулей стоит в множителе после единицы. Например, $0{,}079\cdot 1000=0079{,}0=79$; $5{,}8\cdot 100=5{,}80\cdot 100=580$.

Чтобы *разделить десятичную дробь на 10, 100, 1000, ...*, нужно перенести запятую в этой дроби на столько цифр влево, сколько нулей стоит после единицы в делителе. При этом иногда приходится написать перед целой частью нуль или несколько нулей. Например, $3{,}2:10=0{,}32$; $3{,}2:100=003{,}2:100=0{,}032$.

Чтобы *перемножить две десятичные дроби*, нужно:

1) выполнить умножение, не обращая внимания на запятые;
2) отделить запятой столько цифр справа, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

Если в произведении получается меньше цифр, чем нужно отделить запятой, то перед произведением предварительно записывают нуль или несколько нулей.

Например,

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}1{,}23\\0{,}87\end{array}\\ \hline 861\\ +\,984\\ \hline 1{,}0701\end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}0{,}123\\0{,}7\end{array}\\ \hline 0{,}0861\end{array}$$

Чтобы *разделить десятичную дробь на десятичную дробь*, нужно:

1) в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе;
2) после этого выполнить деление на натуральное число.

Например, $69{,}92 : 2{,}3 = 699{,}2 : 23 = 30{,}4$.

$$\begin{array}{r|l} 699{,}2 & 23 \\ \cline{2-2} -\,69 & 30{,}4 \\ \cline{1-1} -\,09 & \\ 0 & \\ \cline{1-1} -\,92 & \\ 92 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

5. ПРОЦЕНТЫ

Процентом называется одна сотая часть. Запись 1% означает $\frac{1}{100} = 0{,}01$, тогда $p\% = \frac{p}{100}$. Например, $100\% = \frac{100}{100} = 1$; $8\% = 0{,}08$; $230\% = 2{,}3$.

ТРИ ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ

1) Число b, которое составляет $p\%$ от числа a, находится по формуле $b = \frac{a \cdot p}{100}$. Например, найдём число b, которое составляет 45% от 140: $b = \frac{140 \cdot 45}{100} = 63$.
2) Число a, если $p\%$ его равны числу b, находится по формуле $a = \frac{b \cdot 100}{p}$. Например, найдём число a, если 12% его равны 72: $a = \frac{72 \cdot 100}{12} = 600$.
3) Процентное отношение p чисел a и b находится по формуле $p = \frac{a}{b} \cdot 100\%$. Например, найдём процентное отношение p чисел 15 и 40: $p = \frac{15}{40} \cdot 100\% = 37{,}5\%$.

6. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Натуральные числа и дроби, большие нуля, называют *положительными числами*. Числа, противоположные положительным числам, называют *отрицательными числами*.

Противоположные числа — это два числа, сумма которых равна нулю. Например, противоположными являются числа 9 и -9; $-13{,}5$ и $13{,}5$; a и $-a$.

Натуральные числа, числа им противоположные и нуль образуют множество *целых чисел*. Например, числа -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 являются целыми.

Число, которое можно записать в виде $\frac{m}{n}$ (где m — целое число, n — натуральное число), называют *рациональным числом*.

Любое целое число a является рациональным, так как $a=\frac{a}{1}$.

Модулем числа a (записывают $|a|$) называют число, равное расстоянию (выраженному в единичных отрезках) на координатной прямой от начала координат до точки с координатой a. Например, $\left|4\frac{1}{3}\right|=4\frac{1}{3}$; $|-3|=3$; $|0|=0$.

ДЕЙСТВИЯ С ЧИСЛАМИ С ОДИНАКОВЫМИ И РАЗНЫМИ ЗНАКАМИ

Чтобы *найти сумму двух отрицательных чисел*, нужно:

1) сложить их модули;
2) поставить перед полученным числом знак *минус*.

Например, $-8{,}7+(-3{,}5)=-(8{,}7+3{,}5)=-12{,}2$.

Чтобы *найти сумму двух чисел с разными знаками*, нужно:

1) из большего модуля слагаемых вычесть меньший модуль;
2) перед полученным числом поставить знак слагаемого с бо́льшим модулем. Например, $-375+25=-(375-25)=-350$.

Чтобы *найти произведение (частное) двух чисел с одинаковыми знаками*, нужно найти произведение (частное) модулей этих чисел. Например, $(-18)\cdot(-0{,}5)=18\cdot 0{,}5=9$.

Чтобы *найти произведение (частное) двух чисел с разными знаками*, нужно:

1) найти произведение (частное) модулей этих чисел;
2) поставить перед полученным числом знак *минус*.

Например, $5{,}6:(-7)=-0{,}8$; $-\frac{2}{7}:\frac{4}{7}=-\frac{1}{2}$.

Ответы

Глава I.

2. 2) $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2{,}7$. **3.** 2) $40 \cdot 0{,}03 = 6 : 5$; 4) $3 \cdot (2+6) = 2 \cdot (2 \cdot 6)$. **4.** 61300 р. **5.** 2) 10,7; 4) 15,85. **6.** 2) $\frac{9}{56}$; 4) $4\frac{6}{7}$. **7.** 2) $-0{,}02$; 4) 3. **8.** 2), 4) Верно; 6) неверно. **10.** Не успеют. **11.** 2) $\frac{1}{2}(c-d)$; 4) $\frac{n+m}{17}$. **12.** 2) 0; $-12{,}1$; 4) 5; $-0{,}675$. **13.** 2) $60m$; 4) $60m + l + \frac{p}{60}$. **14.** 2) 3. **15.** 2) $0{,}33 \cdot \frac{x}{0{,}27}$. **16.** 2) $-0{,}1$; $\frac{9}{40}$. **17.** 2) Не может; 4) не может. **18.** $b=2$, $c=0$, или $b=5$, $c=0$, или $b=8$, $c=0$. **19.** $p=6x+3y$. **20.** $m=15a+20b$. **21.** $m=al+cn$. **22.** 810. **23.** $45a+15b+10c$. **24.** 2) $b \neq 0$; 4) $a \neq b$. **25.** 2) 23; 153. **26.** $s=3\frac{1}{6}c+1\frac{2}{3}a+2\frac{1}{2}b$, 53 км. **27.** $\frac{s}{t-1}$ км/ч. **28.** 2) Неверно. **29.** 1) $R=\frac{C}{2\pi}$; 2) $l=s-vt$, $v=\frac{s-l}{t}$, $t=\frac{s-l}{v}$; 3) $\rho=\frac{m}{V}$; $m=V\rho$. **30.** $2{,}6a+5$. **31.** $(7+3{,}5(a-2))$ км. **32.** 2) 40; 4) -41. **33.** 2) $3y-2x$; 4) $8{,}7-2\frac{1}{3}m+1\frac{2}{3}n$. **34.** 2) $3-2{,}7b$; 4) $\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}b-3$; 6) 5 р. **35.** 2) $x+5$; 4) $58c+14d$. **36.** 2) 67,048; 4) $-11{,}221$. **37.** 2) 0,28; 4) $7\frac{37}{112}$. **38.** 2) $1{,}4x-2y$; 4) $-1\frac{2}{3}n$; 6) $-11c-4d$. **40.** 2) 4; 4) 2. **41.** Вторая. **42.** 2) $4\frac{13}{18}$; 4) $8\frac{5}{9}$. **43.** 2) $a-2b+3c$; 4) $-a+2b-3c$. **44.** 2) $a-b+c-d$; 4) $a-b-c+d-k$. **45.** 2) $8x-2y$; 4) $3a-2$. **46.** 2) $a-2b+(m+c)$; 4) $a+(-m+3b^2-2a^3)$. **47.** 2) $2a+b-(-m-3c)$; 4) $a-(m-3b^2+2a^3)$. **48.** 2) $4a-4b$; 4) $5x-3y$. **49.** 2) -3. **52.** 1) $101a+20b+101c$; 2) $99a-99c$. **53.** 2) $10\frac{7}{18}$. **54.** 2) $2mn$; 4) $(a+b)\times$ $\times(a-b)$. **55.** 1 ч 40 мин; 50 ч. **56.** 2) 5000 км; 100 км. **57.** 37 440 м^3; 187 200 м^3; 37 440m м^3. **58.** 2) -7. **59.** 113 р. 10 к. **61.** 2) $-1\frac{2}{3}$. **62.** $4a+8$ и $(a-4)(a+8)$. **63.** 575 р. **64.** $s=3+40t$, $t=\frac{s-3}{40}$. **65.** 28,8 м и 38 м. **66.** 2) $(m-1)m$; 4) $(2p+1)(2p+3)(2p+5)$. **67.** $s=6v+15$, $v=\frac{s-15}{6}$. **68.** 2) Верно. **70.** $t=\frac{s-3}{v}$; не успеет. **71.** 4 и 3 или 9 и 1. **72.** $n=50$, $m=42$.

Глава II.

74. 2) $56=14x$; 3) $\frac{x+5}{2}=5x$. **75.** 2) 3; 4) −2. **77.** 2) Нет; 4) −1. **79.** 2) $a=-5$; 4) $a=-2{,}4$. **80.** 2) Нет; $a=3$. **81.** 2) $x=60$. **82.** 1) $x_1=0$, $x_2=2$; 2) $x_1=0$, $x_2=1$; 3) $x_1=0$, $x_2=-3$, $x_3=4$; 4) $x_1=3$, $x_2=-2$, $x_3=1$. **83.** 1) $x=0$; 2) $x_1=2$, $x_2=-2$; 3) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-\frac{1}{3}$; 4) $x_1=3$, $x_2=-1$. **86.** 2) $x=-\frac{5}{7}$; 4) $x=\frac{2}{3}$. **87.** 2) $x=-1{,}3$; 4) $x=-0{,}05$. **88.** 2) $x=\frac{3}{7}$; 4) $x=\frac{1}{3}$. **89.** 2) $x=17$; 4) $y=-1$. **90.** 2) $y=0$; 4) $x=0{,}8$. **91.** 2) $x=7{,}5$; 4) $y=24$. **92.** 2) $y=13$; 4) $x=1$. **93.** 2) $x=13$; 4) $x=-153$. **94.** 2) $x=37$; 4) $x=1{,}1$. **97.** 2) $x=8$; 4) $x=7$. **98.** 2) $x=1{,}4$; 4) $x=0{,}108$. **99.** 2) $x=\frac{a-4}{b}$; 4) $x=\frac{a-3}{b}$; 6) $x=\frac{1-a}{b}$. **100.** 1) $x_{1,\,2}=\pm2{,}5$; 2) $x_{1,\,2}=\pm3$; 3) $x_{1,\,2}=\pm0{,}24$; 4) $x_{1,\,2}=\pm0{,}23$; 5) $x_{1,\,2}=\pm0{,}7$; 6) $x_{1,\,2}=\pm0{,}01$. **101.** 3. **102.** 1) 16; 20; 32; 2) 144; 432; 293. **103.** 2; 12; 84. **104.** 25; 27; 29. **105.** 6; 8; 10; 12. **106.** 1) 48 м^3; 2) 12 деталей в час. **107.** 1) 6 лет; 2) 8 лет. **108.** 1) 22 и 66 кг; 2) 2200 и 1100 т. **109.** 1) 72 детали; 2) 150 машин. **110.** 1) 9 км/ч; 2) 8 км/ч. **111.** 1) 1 м/с; 2) 37,8 км. **112.** 1) 8,5 км; 2) через 4 ч. **113.** 1) 3000 р. и 4500 р.; 2) 100 и 150 деталей. **114.** 1) 20 км; 5 ч 15 мин; 2) 200 км; 3,5 ч. **115.** 1) 75 км/ч, 80 км/ч или 90 км/ч, 95 км/ч; 2) 30 км/ч, 40 км/ч или $36\frac{2}{3}$ км/ч, $46\frac{2}{3}$ км/ч. **116.** 2) $z=6$; 4) $x=0{,}6$. **117.** 2) $x=4$; 4) $x=-2$. **118.** 1) 15 дней; 2) 32 дня. **119.** 1) 1518 кг; 2) 108 км. **120.** 83,6 кг; 508,8 кг; 1327 кг. **121.** $x=2{,}2$. **122.** $x=7$. **123.** 2) $a=2$; 4) $a=75$. **124.** 2) $a=0$. **125.** 1) $x=2a-3$, a — любое; 2) $x=\frac{a+6}{5}$, a — любое; 3) $x=\frac{7}{3a}$, $a\neq0$; 4) $x=\frac{3}{a}$, $a\neq0$; 5) $x=\frac{8}{a-3}$, $a\neq3$; 6) $x=\frac{1}{a+2}$, $a\neq-2$. **126.** 21 км. **127.** 4 км. **128.** 100 кг. **129.** 5 кг. **130.** 1) $x=13{,}4$; 2) $x=1{,}85$. **131.** 1) $x_1=2$, $x_2=-1$; 2) $x_1=\frac{3}{5}$, $x_2=-\frac{1}{5}$. **132.** 50 км/ч.

Глава III.

133. 2) $\frac{1}{4}$ м^2; 4) 7,29 дм^2. **134.** 2) 27 дм^3; 4) 0,064 м^3. **135.** 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; 4) m^5; 6) $\left(\frac{m}{n}\right)^5$. **136.** 2) $6^2\cdot7^2\cdot3^3$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot(2{,}3)^2$. **137.** 2) $x^4\cdot3^2$; 4) $\left(\frac{a}{b}\right)^2(8a-b)^3$. **138.** 2) $5^{16}b^{31}$; 4) $6^{13}a^k$. **139.** 2) a^2+b^4; 4) $2x^3$. **140.** 2) $(-1{,}25)\cdot(-1{,}25)\times\times(-1{,}25)\cdot(-1{,}25)$; 4) $(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$. **141.** 2) 9; 4) 125. **142.** 2) −1; 4) 0. **143.** 2) −125; 4) $-5\frac{1}{16}$. **144.** 2) $\frac{9}{25}$; 4) $12\frac{19}{27}$. **145.** 2) 40; 4) −6. **146.** 2) 164; 4) 23. **147.** 2) $5\cdot10^6+4\cdot10^4+3\cdot10^3+2\cdot10^2+1$; 4) $1\cdot10^7+2\cdot10^6+$

$+3\cdot10^5+5\cdot10^4+1\cdot10^2+7$. **148.** 2) 3 532 037; 4) 101 001. **149.** 2) Делится на 5, не делится на 3; 4) да. **150.** 2) $7{,}81\cdot10^2$; 4) $8{,}0005\cdot10^4$; 6) $1{,}2748\cdot10^2$. **151.** $S=6k^2$, $V=k^3$. **152.** 2) a^3; 4) c^2+3^2. **153.** 2) $3^2>2^3$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^3>\left(\frac{1}{3}\right)^2$. **154.** 2) Нет; 4) нет. **155.** 2) $3{,}08\cdot10^{13}$. **156.** $5{,}1\cdot10^8$; 10^{12}. **157.** 10 кг. **158.** 2) $(-7)^3$; $(-0{,}4)^3$; $\left(\frac{1}{7}\right)^3$; $(-1{,}5)^2$. **159.** 2) 9; 4) 0. **160.** 2) a^7; 4) $(3b)^7$. **161.** 2) 3^{10}; 4) $(-6)^{12}$. **162.** 2) $\left(-\frac{5x}{6}\right)^{12}$; 4) $(n+m)^{20}$. **163.** 2) 2^7; 4) 2^8; 6) 2^{11}. **164.** 2) 2^2; 4) 2^3; 6) 2^9. **165.** 2) 3^3; 4) 3^5; 6) 3^8. **166.** 2) 3^1; 4) 3^2; 6) 3^4. **167.** 2) $\left(\frac{1}{17}\right)^1$; 4) d^{12}. **168.** 2) $(2a)^2$; 4) $(m+n)^5$. **169.** 2) 6; 4) 25. **170.** 2) 44; 4) 9. **171.** 2) $x=64$; 4) $x=27$; 6) $x=16$. **172.** 2) a^{56}; 4) a^{11}; 6) a^{15}. **173.** 2) a^9; 4) a^{12}. **174.** 2) $\frac{1}{16}$; 100. **175.** 2) $(2^4)^5$; 4) $(2^{10})^2$. **176.** 2) $\left(\frac{5}{6}\right)^2$; 4) $(0{,}02)^2$. **177.** 2) $(b^3)^2$; 4) $(x^{10})^2$. **178.** 2) $7^5\cdot6^5$; 4) $4^3\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^3$. **179.** 2) 6^6y^6; 4) $3^3n^3m^3$. **180.** 2) a^6b^3; 4) $(0{,}1)^2c^6$. **181.** 2) $8^3a^{12}b^{21}$; 4) $(-2)^4n^4m^{12}$. **184.** 2) $(2a)^3$; 4) $(2\cdot3)^5$; 6) $(9k)^2$; 8) $(15ab)^3$. **185.** 2) $(a^2b^3)^2$; 4) $(9m)^2$. **186.** 2) $(xy^2z^4)^2$; 4) $(10c^4x^3)^2$. **187.** 2) 1; 4) -1. **188.** 2) 144; 4) 14. **189.** 2) 14; 4) 16. **190.** 2) $\frac{25}{49}$; 4) $\frac{b^3}{512}$. **191.** 2) $\frac{81b^4}{625c^4}$; 4) $\frac{5^6}{7^{12}}$. **192.** 2) $\frac{49}{(2+c)^2}$; 4) $\frac{(a+b)^7}{(a-b)^7}$. **193.** 2) $\left(\frac{2}{5}\right)^5$; 4) $\left(\frac{5}{a}\right)^7$. **194.** 2) $\left(\frac{4x}{3y}\right)^4$; 4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$. **195.** 2) 3^{8+n}; 4) a^{n+13}. **196.** 2) b^{n+k}; 4) 3^{3n+3m}. **197.** 2) 2^n; 4) 2^{3n+3}. **198.** 2) 3^{4n}; 4) 3^4. **199.** 2) 7; 4) 2. **200.** 2) 1; 4) 4. **201.** 2) $\frac{2}{5}$; 4) $2\frac{1}{3}$. **202.** 2) 0,000064; 15 625; $\frac{729}{64}$; $\frac{1\,000\,000}{729}$. **203.** 2) ≈ 9 лет. **204.** 2) 1 953 125; 4) 3,71293. **205.** 1) $21^{12}>54^4$; 2) $10^{20}>20^{10}$; 3) $100^{20}>9000^{10}$; 4) $3^{40}>6^{20}$. **206.** 1) 790; 2) 4; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{7}$. **207.** 2) $3a^2b$; 4) $100n$. **208.** 2) 1. **210.** 2) z^{11}; 4) m^4; 6) $72p^3q^2$. **211.** 2) 2. **212.** 1) $\approx 5{,}31$; 2) $\approx 19{,}5$; 3) ≈ 314. **213.** 2) $35m^2n$; 4) $-4b^5$. **214.** 2) $-21a^6b^6c^2$; 4) $-\frac{9}{8}a^4x^3y^4$. **215.** 2) $-15n^2m^3$; 4) $-26a^4b^4c^5$. **216.** 2) $25b^2$; 4) $4a^6$. **217.** 2) $-a^{10}b^5c^5$; 4) $16x^8y^{12}$. **218.** 2) $\frac{1}{81}n^8m^8$; 4) $0{,}16a^6b^4$. **219.** 2) $-2a^4$; 4) $a^2b^5c^2y^2$. **220.** 2) x^5y^5; 4) $-4a^{10}b^{11}$; 6) $-63m^9n^8$. **221.** 2) 204,8. **222.** 2) $6xy$. **223.** 2) a^2b^3. **224.** 2) $(4x^2)^2$; 4) $(9x^3y)^2$; 6) $(1{,}1a^4b^2)^2$. **225.** 2) $(2b^2)^3$; 4) $(2a^3b^2)^3$; 6) $(-0{,}3xy^5)^3$. **226.** 2) $n=3$; 4) $n=3$; 6) $n=6$. **227.** 2) $2x^2-11x+3$; 4) a^5-a^4+a; 6) $4a^3b-2a^2b^2-5ab^3$. **228.** 2) $8a^2b^3-24a^4b-$

$-2a^2b^3$; 4) $-bc^5+5x^2y^4$. **229.** 2) 0. **230.** 2) $-7,6$. **231.** 2) -252. **232.** $x=\frac{1}{8}$. **233.** 1) Нет, да; 2) да, да. **234.** 800 кг, 160 кг, 450 кг. **235.** 2) $\frac{13}{16}a^2b$. **236.** 2) $2a+b$; 4) $2a^2-3b^2$. **237.** 2) $-y$; 4) $3,8a^2$. **238.** 2) a^2; 4) $2xy-2,2y^2$. **239.** 2) $x^3-x^2y-6xy^2$. **240.** 2) xy; 4) $10mn^2k$. **241.** 2) $13\frac{3}{4}$. **242.** 2) $x=0,93$. **243.** 1) 340; 40 и 20 кг; 2) 1 : 500. **244.** 2) $3x+3y$; 4) $3x+1$. **245.** 2) $0,1c^2$; 4) $6a+22b$. **246.** 2) $6b^2-6ab-2a^2$; 4) $3x^2$. **247.** 2) $-0,07x^2+0,06y^2$; $0,27x^2-0,1y^2$; 4) $0,61a^3+1,12b^3$; $1,39a^3-0,88b^3$. **248.** 2) $3b-5b^2$. **249.** 2) q^3; 4) $-5ab+8b^2$. **250.** 2) $x=-1$; 4) $x=-\frac{27}{34}$. **252.** 2) $3a^3$. **253.** 62. **254.** 93. **255.** 2) $-\frac{1}{3}m+\frac{1}{3}n-\frac{1}{3}p$; 4) $-15x^3-35x^2+5x$. **256.** 2) $75a^2b^2+15a^2b$; 3) $3x^2y^3-6x^4y^2$. **257.** 2) $16ab^2-24a^2bc+8abc^2$; 4) $x^3yz+2xy^3z+3xyz^3$. **258.** 2) $7b-3a$; 4) $-14p-9$. **259.** 2) $6b^2-a^2b$; 4) $\frac{1}{5}a^2-18ab$. **260.** 2) 5; 4) 204. **261.** 2) $x=-3\frac{1}{3}$; 4) $x=-\frac{7}{36}$. **262.** 2) $x=1$; 4) при $x=1$. **263.** 20, 20 и 16 км. **264.** 2) z^2+3z-4; 4) $bc+5b+4c+20$. **265.** 2) $-a^2+8a+20$; 4) $p+pq-q-q^2$. **266.** 2) $30x^4-61x^2y^2+30y^4$; 4) x^3+5x^2+7x+3. **267.** 2) $27a^3-$ $-8b^3$; 4) $27a^3+8b^3$. **268.** 2) $a^3+3a^2b-ab^2-3b^3$; 4) $12x^3-29x^2+7x+6$. **269.** 2) 24; 4) 12,08. **271.** 2) $12\frac{2}{3}$. **272.** 2) $x=a-9$; 4) $x=-0,5a-1$. **275.** 76 м². **276.** 221 см². **278.** 2) y^4; 4) 1. **279.** 2) $9m$; 4) $\frac{4}{5}b$. **280.** 2) 8; 4) 7. **281.** 2) 3; 4) -3. **282.** 2) $-\frac{5}{3}p$; 4) $0,4c$. **283.** 2) $7m^6$; 4) $1\frac{1}{6}$. **284.** 2) $\frac{9}{4}ab^2$; 4) $3ab$. **285.** 2) $81x^4y$; 4) $x^7y^{11}z^3$. **286.** 2) $2b-1$; 4) $2-x$. **287.** 2) $4a-3b$; 4) $1-c$. **288.** 2) $-\frac{2}{3}cd-1$; 4) $-\frac{1}{4}ab+\frac{3}{4}a^2$. **289.** 2) $4-$ $-2x-3y$; 4) $a+3a^2b-2$. **290.** 2) 1; 4) b^3+4b. **291.** 2) $-3a$; 4) $\frac{17}{9}y-\frac{32}{9}b$. **292.** 24. **293.** -3. **294.** 2) 270; 4) 4. **295.** 2) 3; 4) 128. **296.** 2) $\frac{1}{35}$; 4) $1\frac{7}{9}$. **297.** Верно. **298.** 2) $(-10b^2)^3$; 4) $(-0,2xy^3)^3$. **299.** 2) $-7,5n^5m^7k^7$; 4) $-7,5a^5b^7c^7$. **300.** 2) $-2b$; 4) $8x^3$. **301.** 2) $a^3b^7+\frac{3}{4}a^4b^4$; 4) $5b^{10}y^6-4,5b^7y^7+22,5b^5y^{10}$. **302.** 2) $0,09-m^2$; 4) $0,04a^2-0,25x^2$. **303.** 2) $-20b^2+17bc-16by-3c^2+4cy$; 4) $9a^2-24ab+15b^2+12ac-20bc$. **304.** 2) $9x^3$; 4) $-9x^2-3x$. **305.** 2) $x=0,36$. **306.** 125%. **307.** $\frac{1}{400}$. **308.** 2) x^{5n+9}; 4) 3^{5n+2}. **309.** 2) $n=7$; 4) $n=5$. **310.** $k+2m-n$. **311.** 2) $x=0,01$. **312.** 1) 330; 2) 315. **315.** 1061,21; 1104,08; 1218,99. **316.** Одну шестую часть суммы. **317.** $5\frac{1}{7}$ ч.

Глава IV.

318. 2) 177,45. **319.** 2) $3(a-x)$; 4) $6(a+2)$. **320.** 2) $7(3a-b+6)$; 3) $3(3x-y+5z)$. **321.** 2) $c(d+b)$; 4) $x(1-y)$. **322.** 2) $3b(d-1)$; 4) $3p(2k-1)$. **323.** 2) $a^3(a-3)$; 4) $x^2y^2(y-x)$. **324.** $4x^2y(5xy+1)$. **325.** 2) $2x^2y^2(y^2-x^2+3xy)$. **326.** 2) $x(y-x+z)$; 4) $4b(b+2a-3a^2)$. **327.** 1) 18 700; 3) −1,62. **328.** 2) $(a+5)(b-c)$; 4) $(y-3)(1+b)$. **329.** 2) $(m-3)(3n+5m)$; 4) $(c-d)(7a-2b)$. **330.** 2) $(x+y)(a^2+b^3)$; 4) $(a^2+2b^2)(x+y)$. **331.** 2) $(b-c)(a+c)$; 4) $(x-y)(2b+1)$. **332.** 2) $(a-2)(6-a)$; 4) $(m-2)(a^2-b)$. **333.** 3) $(x-y)(x-y-3)$; 4) $(b-3)\times(a-1+b)$. **334.** 2) 16; 4) 48. **335.** 2) $2(a-b)(3a-2b)$; 4) $(a-b)^2(2a-b)$. **336.** 2) $2a^2(a+1)(a+2)$; 4) $5p(p+q)(2p-q)$. **337.** 1) $x_1=0$, $x_2=2$; 2) $x_1=0$, $x_2=-3$; 3) $x_1=0$, $x_2=-0{,}6$; 4) $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=4$; 5) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=\frac{3}{4}$. **339.** 2) $(m-n)(1+p)$; 4) $(x-y)(1+2a)$. **340.** 2) $(p-1)(4q+1)$; 4) $(p-1)\times(4q-1)$. **341.** 2) $(c+d)(a-3b)$; 4) $(a-3b)(x+5y)$. **342.** 2) $5(x+y)(2x+1)$; 4) $(3z^2+2y^2)(16x-5y)$. **343.** 2) $(2nk+5m)(3mk-7n^2)$; 4) $(5c-3x)(8b-3c)$. **344.** 2) $(y-x^2)(b+c-a)$; 4) $(a-b)(x^2+y-x)$. **345.** 2) −0,625; 4) −0,33. **346.** 2) 12 500; 4) 28. **347.** 1) $x_1=4$, $x_2=-1$; 2) $x_1=4$, $x_2=-7$; 3) $x_1=2$, $x_2=-0{,}2$; 4) $x_1=-4$, $x_2=\frac{1}{3}$. **348.** x^2-3x. **349.** 1) $(x+1)(x+2)$; 2) $(x-2)\times(x-3)$; 3) $(x+1)(x-8)$; 4) $(x-1)(x+10)$. **350.** 1) $(a-1)(a^2+3a+3)$; 2) $(x-1)(x+3)(x-2)$; 3) $(a+1)(a^3+a^2-a+1)$; 4) $(a-1)(a+1)(2a^2+1)$. **351.** 2) $\left(\frac{1}{3}ab\right)^2$; $(0{,}5xy)^2$; $(0{,}4m^2)^2$; $(0{,}9n^3)^2$. **352.** 2) $(2a-3)(2a+3)$; 4) $(9a-4b)(9a+4b)$. **353.** 2) $\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{4}b\right)\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}b\right)$; 4) $(0{,}3x-0{,}4y)(0{,}3x+0{,}4y)$. **354.** 3) $(xy^2-4)(xy^2+4)$; 4) $(5a-3b^3)(5a+3b^3)$. **355.** 2) $(a-b^2)(a+b^2)(a^2+b^4)$; 4) $(b-3)(b+3)(b^2+9)$. **356.** 2) c^2-9d^2; 4) $9m^2-4n^2$. **357.** 2) a^4-b^6; 4) m^6-n^6. **358.** 2) $4m^8-25n^4$; 4) $1{,}44a^4-0{,}09b^4$. **359.** 2) 4896; 4) 2491. **360.** 2) 1584; 4) 39 999. **361.** 2) $(m-n-k)(m-n+k)$; 4) $3(x-y)(3x+y)$. **362.** 2) $(a-c)(a+2b+c)$; 4) $8(b-a)(a+b)$. **363.** 2) 980; 4) 5,87; 6) $37\frac{1}{3}$. **364.** 2) $x=-3\frac{2}{3}$; 4) $x=2$. **365.** 2) $16x^4-y^4$; 4) $81a^4-16b^4$. **366.** 2) $\frac{5}{8}$; 4) $\frac{1}{3}$. **369.** 1) $6b(a-b)(a+b)$; 2) $a^2(2b-1)(2b+1)$; 3) $a^2b^2(2ab-1)(2ab+1)$; 4) $(3a^2-2b^2-ab)(3a^2-2b^2+ab)$. **370.** 2) $x^2-2xy+y^2$; 4) x^2+2x+1. **371.** 2) $9x^2+12xy+4y^2$; 4) $25z^2-10zt+t^2$. **372.** 2) $0{,}16b^2-0{,}4bc+0{,}25c^2$; 4) $\frac{1}{16}a^6-\frac{2}{5}a^3+\frac{16}{25}$. **373.** 2) $9b^4+12ab^3+4a^2b^2$; 3) $16x^2y^2+4xy^3+0{,}25y^4$. **374.** 2) 1681; 4) 9604. **375.** 2) 3249; 4) 1 002 001. **376.** 2) 1,008; 4) 1,022; 6) 0,988; 8) 0,978. **377.** 2) $x=\frac{1}{16}$. **378.** 2) $x=\frac{1}{4}b^2$; 4) $x=1$. **379.** 2) $(1+c)^2$; 4) $(9-x)^2$. **380.** 2) $(10-3a)^2$; 4) $(a+5b)^2$. **381.** 2) $(p^2-q)^2$; 4) $(5a^3+3b)^2$. **382.** 2) $(b-3)^2\times$

$\times(b+3)^2$; 4) $(2-ab)^2(2+ab)^2$. **383.** 2) $-(3-b)^2$; 4) $-3(a+2b)^2$. **384.** 2) $x=2$; 4) $x=-0,5$. **385.** 2) $4xy$; 4) $2(4a^2+b^2)$. **387.** 2) 60 000; 4) 216. **388.** 2) 10 000; 4) $\frac{2}{3}$. **389.** 1) $x^3+6x^2+12x+8$; 2) $27-27y+9y^2-y^3$; 3) $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$; 4) $27b^3+54b^2a+36ba^2+8a^3$. **390.** 1) $(5+a)^3$; 2) $(m-4)^3$; 3) $(x^2-y)^3$; 4) $(c^2+d^2)^3$. **391.** 4 или 6. **392.** 2) $3(x-2)(x+2)$; 4) $4x(2-x)(2+x)$; 6) $2a^2b(4a-1)(4a+1)$. **393.** 2) $2(m-n)^2$; 4) $8(p-1)^2$; 6) $12m^3n(m+1)^2$. **394.** 2) $(x+1)^2(x^2+2x-1)$; 4) $(3+y)^2(9-y^2-6y)$. **395.** 2) $(1-x+y)(1+x-y)$; 4) $(2-x-y)(2+x+y)$. **396.** 2) $(a+b)(a-b-1)$; 4) $(x+1)^2(x-1)$; 6) $(x-1)\times$ $\times(x+1)(x^2-x+1)$. **397.** 2) $\frac{5}{8}$; 4) $1\frac{3}{8}$. **398.** 2) 740; 4) -9700. **400.** 2) 474. **401.** 1) $x_1=5$, $x_2=-\frac{5}{3}$; 2) $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{2}{5}$; 3) $x_1=1$, $x_2=-1$; 4) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$. **404.** 1) a^3-8; 2) b^3+x^3; 3) $8a^3+27$; 4) a^6-1. **405.** 1) $(3a-b)(9a^2+$ $+3ab+b^2)$; 2) $(xy+4)(x^2y^2-4xy+16)$; 3) $(2m+n^3)(4m^2-2mn^3+n^6)$; 4) $(c^2-5d)(c^4+5c^2d+25d^2)$. **406.** 1) $(x-2)(x^2+3x+6)$; 2) $(a-1)(a-2)(a+3)$. **408.** 2) $(x-y)(4+3x-3y)$; 4) $(b-a)(b-a-1)$. **409.** 2) $2a(a+2)$; 4) $(a-2b)\times$ $\times(a+2b)$. **410.** 2) $(p-q)(c-a+b)$. **411.** 2) $(2m-n)(7a+4b)$; 4) $(5a-2b+1)\times$ $\times(5a+2b-1)$. **412.** 2) 906. **413.** 2) $46\frac{2}{3}$. **415.** 1) $(m-k)(n-m+k)$; 2) $(c-1-$ $-d-e)(c-1+d+e)$. **416.** 2) $-4(x^2+6)$; 4) $(2x+9)(8x+5)$. **417.** 2) $y=3$; 4) $y=\frac{2}{3}$; 5) $x=2$. **418.** Площадь прямоугольника меньше площади квадрата на 144 м^2. **419.** 240 км. **420.** 1 ч 12 мин. **421.** 2) $-390,5$. **422.** 1) a^2- $-b^2-2bc-c^2$; 2) $a^4-b^2+2bc-c^2$. **423.** 1) 5; 2) 26. **424.** 1) $x=2$; 2) $x=3$; 3) $x=2$; 4) $x=0,2$. **426.** Верно.

Глава V.

427. $\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$. **428.** $\frac{c^3+d^3}{2cd}$. **430.** 2) $b\neq 0$; 4) $a\neq 3$. **431.** 2) $v=\frac{s-s_0}{t}$. **432.** 1) $a=9$; 2) $a=-cb$; 4) $a=4m^2$. **434.** 2) $\frac{4}{5}$; 4) -2. **435.** 2) $-\frac{2}{7}$; 4) $\frac{b}{3a}$. **436.** 2) $\frac{7a}{5}$; 4) $\frac{1}{3(a-b)}$; 6) $-\frac{1}{3}$. **437.** 2) $\frac{2}{a(a-b)}$; 4) $\frac{1}{m-n}$. **438.** 2) $\frac{2a}{m-n}$; 3) $\frac{4a-1}{2a+3}$; 5) $\frac{1+b}{1-b}$. **439.** 2) $\frac{q^2}{p-q}$; 3) 5; 5) $-\frac{1}{4}$. **440.** 2) $\frac{3a+2b}{2a+3b}$; 4) $-\frac{1}{ab}$. **441.** 2) $\frac{1}{a+b}$; 4) $5+x$. **442.** 2) $10-7b$; 3) $\frac{y}{5+y}$; 5) $\frac{5ab}{a^2-b^2}$. **443.** 2) $\frac{1}{b+7}$; 4) $\frac{1}{1-2p}$. **444.** 2) $n-m$; 4) $\frac{1}{5-2x}$. **445.** 2) $\frac{4a+1}{4a-1}$; 4) $\frac{10(m+n)}{3(m-n)}$. **446.** 2) $a+b$; 4) $\frac{x-y}{3-2x}$. **447.** 2) $\frac{a}{2}$; 4) $y^2(x-y)$. **448.** 2) $-1\frac{2}{3}$. **449.** 1) -25; 2) 0,5. **450.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -3; 3) 2; 4) $-\frac{1}{3}$. **451.** 2) $\frac{10}{14}$, $\frac{3}{14}$; 4) $\frac{2a}{2b}$, $\frac{a}{2b}$.

452. 2) $\frac{3b^2}{4ab}$, $\frac{2a^3}{4ab}$; 4) $\frac{2b^2}{6ab}$, $\frac{9ac}{6ab}$, $\frac{c}{6ab}$. **453.** 2) $\frac{3a^2}{18a^2b^2}$, $\frac{2(a^2+b^2)}{18a^2b^2}$, $\frac{a(3-a)}{18a^2b^2}$; 4) $\frac{21y^3}{60x^4y^4}$, $\frac{310x^3y}{60x^4y^4}$, $\frac{80x^2}{60x^4y^4}$. **454.** 2) $\frac{7a(3x+y)}{9x^2-y^2}$, $\frac{6b(3x-y)}{9x^2-y^2}$; 4) $\frac{6x}{8(x+y)}$, $\frac{x}{8(x+y)}$. **455.** 2) $\frac{7a}{x^2-9}$, $\frac{a(x-3)}{x^2-9}$; 4) $\frac{6x(x+y)}{x^2-y^2}$, $\frac{7xy(x-y)}{x^2-y^2}$, $\frac{3}{x^2-y^2}$. **456.** 2) $\frac{(a-b)^2}{5(a^2-b^2)}$, $\frac{5(a^2+b)}{5(a^2-b^2)}$; 4) $\frac{5c}{(c-2)^2}$, $\frac{6(c-2)}{(c-2)^2}$. **457.** 3) $\frac{4a^2b^3}{4ab^2}$, $\frac{3b}{4ab^2}$, $\frac{8}{4ab^2}$; 4) $\frac{18ab}{6a}$, $\frac{7}{6a}$; 6) $\frac{ab(a^2-b^2)}{ab(a-b)}$, $\frac{3(a-b)}{ab(a-b)}$, $\frac{ab}{ab(a-b)}$. **458.** 2) $\frac{15x(x+1)}{12x(x^2-1)}$, $\frac{-48x^2}{12x(x^2-1)}$, $\frac{4(x-1)}{12x(x^2-1)}$; 4) $\frac{3ac(2a+3)}{c(4a^2-9)}$, $\frac{4ac(2a-3)}{c(4a^2-9)}$, $\frac{5b}{c(4a^2-9)}$. **459.** 2) $x=\frac{1}{3}$; 4) $x=1\frac{1}{6}$. **460.** 1) $\frac{5a}{a^3-27}$, $\frac{(a-3)^2}{a^3-27}$, $\frac{a^2+3a+9}{a^3-27}$; 2) $\frac{3(x^2-2x+4)}{x^3+8}$, $\frac{x+1}{x^3+8}$, $\frac{(x+2)^2}{x^3+8}$; 3) $\frac{2m(m+n)}{(m+n)(m-n)^3}$, $\frac{2n(m^2-n^2)}{(m+n)(m-n)^3}$, $\frac{(m-n)^2}{(m+n)(m-n)^3}$; 4) $\frac{k-1}{(k-1)(k+1)^3}$, $\frac{2(k+1)^2}{(k-1)(k+1)^3}$, $\frac{3(k^2-1)}{(k-1)(k+1)^3}$.

461. 1) $x^{4n}-y^{4n}$; 2) $a^{2n}-b^{2n}$. **462.** 3) $\frac{7}{a^2}$. **463.** 2) $\frac{3}{5b}$; 4) $\frac{3ad-b}{12d}$. **464.** 2) $\frac{4c^2+2c-3}{c^2}$; 4) $\frac{mn-kn^2+m^2}{n^2}$. **465.** 3) $\frac{b(cd^2+d+c)}{c^2d^2}$. **466.** 1) $\frac{3x}{2(1-x)}$; 3) $\frac{8y-25x}{10(y-3)}$. **467.** 3) $\frac{a+b-y}{ab}$. **468.** 1) $\frac{x-1}{x^2-9}$; 3) $\frac{2x^2+3x+2}{x^2-16}$. **469.** 3) $\frac{2(4a+4b-35)}{2b-5}$. **470.** 1) $\frac{6n-47}{n^2-49}$; 3) $\frac{24y^2+y+1}{1-9y^2}$. **471.** 3) $\frac{4+7m-7n}{(m-n)^2}$. **472.** 2) $\frac{b^2-3b}{b-2}$; 4) $\frac{1}{a+1}$. **473.** 2) $\frac{2(2x-y)}{x^2-y^2}$; 4) $\frac{a^2-a+1}{a(4a^2-1)}$; 6) $\frac{6-7a}{(a-2)(a^2-4)}$. **474.** 2) -1; 4) $-\frac{5}{9}$. **475.** 2) $\frac{2}{(3x+1)^2}$; 4) $\frac{2(x^2+9)}{(x^2-9)^2}$. **476.** 2) $x=1$; 4) $z=15$. **477.** 1) $\frac{2}{a^3-1}$; 3) $\frac{3ab}{a^3+b^3}$; 4) $\frac{6m}{27-m^3}$. **478.** 1) 5; 2) $1\frac{9}{19}$. **479.** 1) $\frac{1-2b^n}{a^{2n}-b^{2n}}$; 2) $\frac{a^n-b^n}{a^n(a^n+b^n)}$. **480.** 2) $\frac{4}{13}$; 4) 7,5. **481.** 2) $\frac{k^2}{mn}$; 4) $\frac{2a^2b^2}{c^3}$. **483.** 2) $\frac{a}{bc}$; 4) $\frac{ac}{b}$. **484.** 2) $\frac{18a^2}{7}$; 4) $\frac{a^3b^3}{d^2}$. **485.** 2) $\frac{2y}{5c^2}$; 4) $\frac{2a^2d^2}{3c}$; 6) $\frac{22p^3n}{m^4}$. **486.** 2) $\frac{2b}{a}$; 4) $3b$; 6) $\frac{a(a+b)}{3b}$. **487.** 1) $\frac{b}{3(1+a)}$; 2) $\frac{1}{3m^2(m+n)}$; 4) $\frac{5}{3(a-b)}$. **488.** 2) 16; 4) -2. **489.** 2) Верно. **490.** 2) $b-3$; 4) $(a-1)(2a-1)$. **491.** 2) $x=-4$;

4) $x=49$. **492.** 1) $x=\frac{a}{a-b}$; 2) $x=b(a+b)$; 3) $x=\frac{b(a+b)}{a-b}$; 4) $x=\frac{b(a+b)}{a}$.

493. 1) $\frac{1}{8}(a^2-b^2)$; 2) $\frac{1}{7}(a^2-b^2)$; 3) $n+m$; 4) $\frac{m+n}{2(p^2-pc+c^2)}$. **495.** 2) $\frac{2}{3}(a+1)$; 4) 1; 6) $\frac{b^2}{b^2+1}$. **496.** 2) $\frac{a^2(b^2-1)}{b^2}$. **497.** 2) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$. **498.** 2) $\frac{1}{6(c+d)}$; 4) $\frac{m+5}{m-2}$. **499.** 2) $\frac{b}{a+b}$; 4) $\frac{1}{c}$. **500.** 2) $\frac{ab-2}{a+1}$; 4) $n+2$. **501.** 2) $\frac{a^2+4}{4a}$; 3) $\frac{m^2}{m-n}$. **502.** 2) $1\frac{5}{6}$; 4) 2. **503.** 1) $\frac{d-c}{d}$; 2) $\frac{2n(2n-k)}{2n+k}$; 3) $\frac{2q(m-2q)}{m+2q}$.

506. 2) $x=-2$; 4) $x=0$. **507.** 2) $x=\frac{2a^2}{3b}$; 4) $x=\frac{(a-1)^2}{a}$. **508.** 1) $x=0{,}5$; 3) $x=-2\frac{2}{15}$. **509.** 2) 2,5. **510.** 2) $\frac{b-3b^2-14}{6(b^2-1)}$; 4) $\frac{28n^2+9nm-4m^2}{m(4n^2-m^2)}$; 6) $\frac{4a^2-4a-b}{a(a+2)}$. **511.** 2) 1; 3) $\frac{x(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+3)(x^2+2)}$. **512.** 3) $\frac{4}{a-b}$; 4) $\frac{1}{c(a+b)}$.

513. $\frac{V_1p}{V}$ кг. **514.** $\frac{us}{v}$ км. **515.** $\frac{v-v_1}{v+v_1}s$ км. **516.** $\frac{ab}{a+b}$ ч. **517.** $\frac{ab}{b-a}$ ч.

518. 2) $R_1=\frac{RR_2}{R_2-R}$. **519.** 10 м. **520.** 1) $\frac{b}{4a^2+2a+1}$; 2) $\frac{9a^2-3ab+b^2}{b}$; 3) $\frac{6-c}{6+c}$; 4) $\frac{5+7b}{5-7b}$; 5) $a+1$. **521.** 1) $\frac{2}{a^3-1}$; 2) $\frac{2a}{a^3+8}$; 3) $\frac{3ab}{a^3+b^3}$; 4) $\frac{6m}{27-m^3}$.

Глава VI.

530. D (1; 5). **531.** 5. **532.** –2. **533.** а) (5; –3), (–1; 2), (0; –4), (–2; 0), (–2; –3); б) (–5; 3), (1; –2), (0; 4), (2; 0), (2; 3); в) (–5; –3), (1; 2), (0; –4), (2; 0), (2; –3). **535.** (2; 2), (–2; 2), (–2; –2), (2; –2). **537.** 2) 4; 2; 0; –2; –4; 4) –36; –16; 4; 24; 44. **538.** 2) $t=4$. **539.** 2) –9; 103; –1,25; 0,8; 0,49. **540.** 2) $x=-0{,}5$, $x=3{,}1$, $x=-14$. **541.** 2) Верно; 4) неверно. **542.** 2) $y(-3)=3$ верно, $y\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$ верно, остальные неверны. **549.** 2) Нет; 4) да. **550.** 2) Да; 4) нет. **551.** $P=4x+6$, $S=x(x+3)$; 1) $P(5)=26$, $S(5)=40$; $P(2{,}1)=14{,}4$, $S(2{,}1)=10{,}71$; 2) $x=8$, $x=10$. **552.** $m(V)=2600V$; 1) 3900 кг, 26 000 кг; 2) 0,2 м^3, 3 м^3. **556.** $y=200n$, $y(6)=1200$, $y(11)=2200$. **557.** $s=80t$, $s(3)=240$, $s(5{,}4)=432$. **564.** C, D. **567.** В 2 раза. **568.** 5 т. **571.** $k=-2$. **572.** $y=14x$. **580.** 2) $x=-1$, $x=3$, $x=\frac{1}{3}$. **585.** 2) Нет; 4) нет. **595.** 2) $k=-3$. **596.** (13; 0), (0; 13), 84,5. **597.** 2) (2; –3). **598.** $k=2\frac{2}{9}$, $b=5\frac{5}{9}$. **599.** Нет. **604.** 2) –20. **607.** 2) (0; 4), (2; 0); 4) (0; –0,6), $\left(\frac{3}{4}; 0\right)$; 6) (0; –5), (7,5; 0).

Глава VII.

615. 2) $x=\frac{y-2}{3}$, $y=3x+2$; 4) $x=\frac{3-7y}{2}$, $y=\frac{3-2x}{7}$. **616.** 2) $\left(x;\ \frac{2+x}{3}\right)$, где x — любое число. 4) $\left(x;\ \frac{6x+2}{9}\right)$, где x — любое число. **617.** 2) (3; 4); 4) (2; 7); (9; 2). **622.** $c_1=-1$, $c_2=18$. **623.** $a=5$, $b=-9$. **624.** 1) Можно. **625.** 1 и 8 или 9 и 3. **626.** 2) $x=10+y$, $y=x-10$; 4) $x=11-3y$, $y=\frac{11-x}{3}$; 6) $x=\frac{5y-3}{3}$, $y=\frac{3+3x}{5}$. **627.** 2) (1; −1); 4) $\left(-\frac{1}{3};\ -5\frac{2}{3}\right)$; 6) (1; −1). **628.** 2) (−73; −30); 4) $\left(1\frac{2}{11};\ 8\frac{6}{11}\right)$; 6) $\left(-7\frac{2}{9};\ -4\frac{1}{3}\right)$. **629.** 1) (4,4; 2,4). **630.** 2) (−2; −2); 4) (−17; 5). **631.** 2) (15; 12); 4) (5; 4). **632.** 2) $\left(3\frac{1}{11};\ 1\frac{9}{11}\right)$; 4) $\left(-\frac{23}{27};\ \frac{1}{27}\right)$; 6) (1; −1). **633.** 2) $\left(1;\ -\frac{1}{2}\right)$; 4) (−1; 6). **634.** 2) (3; 1); 4) (−4; −3). **635.** 2) (2; 6); 3) (−12; 10). **636.** 2) (4; 4); 4) (2; 7). **637.** 2) $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{7}{6}\right)$; 4) (2; 5). **638.** 2) (−2; 3); 4) (−6; 0). **639.** 2) (5; 11). **640.** 1) (3; 1); 2) (7; 5); 3) (2; 0). **641.** 2) (0; 3), (−1; 0); 4) (0; 6), (2,4; 0). **644.** 2) (1; −3); 4) (3; 9). **645.** 2) (1; −1); 4) (3; 1). **646.** 2) (2; −4); 4) (3; −2). **653.** 2 р.; 0,3 р. **654.** 2,7 м, 1,6 м. **655.** 21 ц, 14 ц. **656.** 100 и 200. **657.** 40 и 30. **658.** 38 га, 34 га. **659.** 9 кг, 6 кг. **660.** 1000 р., 600 р. **661.** 62 л, 78 л. **662.** 19 л, 14 л. **663.** 10 км/ч, 2 км/ч. **664.** 30 км/ч, 35 км/ч. **665.** 200 т, 260 т. **666.** 552 и 672. **667.** 39. **668.** 48. **669.** 8 л, 5 л, 5 л. **670.** 16 км. **671.** 2) $\left(2;\ \frac{1}{3}\right)$; 4) (2; −7). **672.** 2) (−88; 12). **673.** 1) $\left(3\frac{1}{2};\ 1\frac{1}{3}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right)$; 3) $(-2a;\ a)$, где a — любое число; 4) нет решений; 5) (2,5; −3,5); 6) (−5; 4,5). **676.** 1) $a\neq 3$; 2) $a=3$, $c=15$; 3) $a=3$, $c\neq 15$. **677.** 1) 1 и 5; 5 и 3; 3 и 4; 7 и 2; 9 и 1; 2) 5 и 3. **678.** 35 и 9 лет. **679.** 350 км, 8 ч. **680.** 14 400 р., 17 500 р. **681.** 460 м^3, 560 м^3. **682.** 52 м, 34 м. **683.** 36 строк, 50 букв. **684.** 1) (3; 4); 2) $\left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{6}\right)$; 3) (3; −2); 4) (17,6; −14,4). **685.** 18 000 р., 27 000 р.

Глава VIII.

686. 1) Два; 2) один. **687.** Двумя. **688.** Три. **689.** 1) 23, 32; 2) 23, 32, 22, 33. **690.** Три: п, о; п, л; о, л. **691.** 1) Тремя; 2) одним; 3) тремя. **692.** Шестью. **693.** Шесть: АМС; АСМ; САМ; СМА; МАС; МСА. **694.** Девять: бб; кк; сс; бк, кб; бс; сб; кс; ск. **695.** 23, 32, 24, 42, 34, 43; 2) 23, 32, 24, 42, 34, 43, 22, 33, 44. **696.** 1) 10, 12, 20, 21; 2) 10, 12, 20, 21, 11, 22. **697.** 111, 112, 121, 122, 211, 221, 222. **698.** 1) 102, 120, 201, 210;

2) 100, 101, 102, 110, 111, 112, 120, 121, 122, 200, 201, 202, 210, 211, 212, 220, 221, 222. **699.** 39. **703.** 6. **704.** 12. **705.** 15. **706.** 16. **707.** 25. **708.** 42. **709.** 56. **710.** 1) 36; 2) 30. **711.** 1) 30; 2) 25. **712.** 1) 3; 2) 6; 3) 10. **713.** 1) 6; 2) 12; 3) 20. **714.** х, р; х, а; х, г; к, р; к, а; к, г. **715.** х, р; х, г; к, р; к, г; с, р; с, г. **718.** 1) 8; 2) 4. **719.** 1) 64; 2) 48. **720.** 1) 125; 2) 60. **721.** 1) 100; 2) 48. **722.** 100. **723.** 120. **724.** 1) 720; 2) 990. **725.** 1) 72; 2) 504; 3) 3024. **726.** 1) 24; 2) 720. **727.** 1) 720; 2) 120; 3) 40 320; 110; 30; 1680. **728.** 1) 66; 2) 666. **729.** 1) 276 способами; 2) 300 способами. **730.** 1) 78, 79, 87, 89, 97, 98; 2) 78, 79, 87, 89, 97, 98, 77, 88, 99. **731.** 789, 798, 879, 897, 978, 987. **732.** 1) 80, 89, 90, 98; 2) 80, 89, 90, 98, 88, 99. **733.** 1) А, В; А, Г; В, Г; 2) а, б; б, а; а, в; в, а; б, в; в, б. **734.** 1) 60-ю; 2) 120-ю. **735.** 4 (столько же, сколько способов выбрать одного из четверых).

Упражнения для повторения курса алгебры VII класса

736. 2) 0,01; 4) −20; 6) $\frac{1}{3}$. **737.** −128. **738.** $100a+10b+c$, $100c+10b+a$. **739.** $1000a+c$. **740.** 2) 0. **741.** 2) $x=2$; 4) $x=21$. **742.** 2) $x=7\frac{1}{2}$; 4) $x=\frac{21}{22}$. **743.** 2) $x=2$; 4) $x=2\frac{2}{7}$. **744.** 2) $x=2$; 4) $x=12\frac{1}{7}$. **745.** 40; 36; 43. **746.** 9 лет. **747.** 48 км. **748.** 120 км. **749.** 2) $\frac{1}{7^3}$; 4) $2b$; 6) 0. **750.** 2) $-a^4b^2c^3$; 4) m^6n^6. **751.** 2) $0{,}64a^2c^4$; 4) $\frac{1}{16}a^4b^8c^{12}$. **752.** 2) $4a^2+5ab+b^2$; 4) $8a^2$. **753.** 2) $\frac{1}{6}m^4n^2-\frac{1}{4}m^3n^3+\frac{1}{3}m^2n^4$; 4) $m^4n-\frac{7}{8}m^3n^2+\frac{1}{8}mn$. **754.** 2) $12a^3b-3a^2-24a^2b^3+6ab^2+8ab^3-2b^2$; 4) m^2-n^2+4n-4; 6) $1{,}5a^3+11{,}5a^2-a-1$. **755.** 2) $-\frac{1}{7}$; 4) $1\frac{1}{8}$. **756.** 2) $1-16b^4$; 4) $\frac{a^2}{4}$. **757.** 2) $16ab$. **758.** 2) $4(1+b)^2$; 4) $3(1+a)(7-3a)$. **759.** 2) $2-a$; 4) $\frac{3(b-2)}{b+2}$. **760.** 2) $\frac{b^2+a+b}{a^2b^2}$; 4) $\frac{40y^2+36xy-75x^2}{60x^2y^3}$. **761.** 2) $\frac{a^3+b^3}{a^2b^3}$; 4) $\frac{b}{9}$. **762.** 2) $-\frac{1}{2x+3y}$; 4) $\frac{1}{m-n}$. **763.** 2) $\frac{2(a-b)^2}{b^2}$; 4) $\frac{3}{2}$. **764.** 2) $\frac{1+9b}{ab-2}$; 4) $\frac{d(2c+d)}{3(c-2d)}$. **765.** 2) $\frac{1-2a^2}{(a+1)(1-2a)}$; 4) b. **766.** 2) $\frac{1+b}{1-b}$. **772.** 2) $\left(\frac{11}{14}; 1\frac{5}{14}\right)$. **773.** 2) (3; 3); 4) (−1; −6); 6) $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$. **774.** 2) (3; 4); 4) $\left(\frac{7}{12}; \frac{1}{12}\right)$. **775.** 2) (−2; 4); 4) (3; 1). **776.** 20 л, 5 л. **777.** 90 р., 60 р. **778.** $\frac{5}{8}$. **779.** 4 км/ч, 20 км/ч. **780.** 2) $x=1$; 4) $-\frac{2}{3}$. **781.** 150. **782.** $k=\frac{2}{3}$, $b=\frac{5}{3}$. **784.** 2) (3; 1). **785.** 900 р., 700 р. **786.** 11 и 5 лет. **787.** 21 км. **788.** 2) $x_1=-3$, $x_2=2$, $x_3=4$; 4) 0; −36; 5) x^2-6x+8. **789.** 2) $A=0$ при

$x_1=5$, $x_2=\frac{1}{3}$; $B=0$ при $x_1=1$, $x_2=5$; 4) $x=\frac{1}{3}$. **790.** 2) Проходит через точку (–3; 5), не проходит через точку (–1; 2); 4) $x=-\frac{1}{2}$; 6) (–3, 5). **791.** 2580 ц. **792.** 80 га. **793.** 2) b^3; 4) $8a^6$. **794.** 2) $2a^2(a^2-1)$; 4) $(3b-14a)(16a-7b)$. **795.** 1) $(ab^2c-1)(a^2b^4c^2+ab^2c+1)$; 3) $(2ab+5c)\times$ $\times(4a^2b^2-10abc+25c^2)$; 3) a^2; 4) $16a^2$. **796.** 1) $(ab-cd)(4b+15c)$; 2) $(m-1)(m^2+1)$; 3) $(a+b-c)(a+b+c)$; 4) a^2; 5) $(m-1)^3$; 6) $(1-a+b)\times$ $\times(1+a-b)$. **797.** 1) $(a+1)(a-3)$; 2) $(b-3)(b-4)$; 3) $(a-2)(a^2+3a+6)$; 4) $(m-2)(m-5)$; 5) $(m+1)(m-2)$; 6) $(x-1)(x-2)(x+3)$. **798.** 1) $\frac{1}{m(1-m^2)}$; 2) $\frac{x^2y^2-x^2-y^2}{x^2y^2(x^2+y^2)}$. **799.** 1) $\frac{(a^2+b^2)^2}{a^4+b^4}$; 2) 1; 3) 1. **800.** 1) $\frac{2a(b-2a)}{b+2a}$; 2) $\frac{2q(2q-p)}{p+2q}$; 3) $\frac{1}{2-3a^2}$; 4) $\frac{1}{2-p}$. **801.** 1) $b=7$; 2) $b=1$; 3) $b=11$; 4) $b=11{,}5$. **802.** 1) $y=-3$; 2) $y=x$; 3) $y=-x+4$; 4) $y=-5x+7$. **803.** 12 км. **804.** 60 км, 12 км/ч, 5 ч. **805.** 8 лошадей, 30 дней. **806.** 3 ч, 9 ч. **810.** 2400 р. **811.** 28 и 21. **812.** 2 и 4. **813.** 18 кур, 12 зайцев.

Задачи повышенной трудности

814. Показать, что $16^{11}=32\cdot2^{39}$. **815.** Показать, что данное число равно $9\cdot37\cdot333^{776}+21\cdot37\cdot777^{332}$. **816.** 1) Показать, что $2^{187}=8\cdot16^{46}$. Последняя цифра числа 16^{46} равна 6, так как при умножении чисел с последней цифрой 6 получается число также с последней цифрой 6. Поэтому последняя цифра данного числа равна 8. 2) Показать, что $3^{115}=27\cdot81^{28}$. Так как последняя цифра числа 81^{28} равна 1, то последняя цифра данного числа равна 7. 3) Показать, что $7^{158}=49\cdot2401^{39}$. Так как последняя цифра числа 2401^{39} равна 1, то последняя цифра данного числа равна 9. **817.** 1) 5. 2) Показать, что данное число равно $27^2\cdot(27^4)^{89}+53^3\cdot(53^4)^{68}$, последняя цифра чисел 27^4 и 53^4 равна 1, числа 27^2 — цифра 9, числа 53^3 — цифра 7. Поэтому последняя цифра данного числа равна 6. **818.** Показать, что данное число равно $32\cdot(32^4)^{91}+43\cdot(43^4)^{60}$. Так как последняя цифра числа 32^4 равна 6, то последняя цифра первого слагаемого равна 2, а так как последняя цифра числа 43^4 равна 1, то последняя цифра второго слагаемого равна 3. Следовательно, последняя цифра данного числа равна 5 и поэтому это число делится на 5. **819.** Показать, что каждое из чисел 132 и 576 делится на 12. **820.** Сначала показать, что данное число делится на 2. Затем показать, что если из степени числа 10 с натуральным показателем вычесть единицу, то получится число, все цифры которого равны 9. Далее записать данное число в виде $(10^{23}-1)+$ $+(10^{19}-1)-180$, поэтому оно делится на 9. **821.** Показать, что $n^3+11n=$ $=(n-1)n(n+1)+12n$ и произведение трёх последовательных натуральных чисел делится на 6. **822.** 1) Показать, что $n^3+3n^2+5n+105=(n-1)\times$ $\times n(n+1)+3(n^2+2n+35)$. 2) Показать, что $n^3+12n^2+23n=(n-1)n(n+1)+$ $+12(n^2+2n)$. **823.** Если оба числа m и n чётные или оба нечётные, то $5m+7n+2$ — чётное число, и поэтому число $(5m+7n+2)^4$ делится на $2^4=16$. Если одно из чисел m, n чётное, а другое нечётное, то $3m+n+5$ — чётное число, и поэтому число $(3m+n+5)^5$ делится на $2^5=32$ и на 16. **824.** Показать, что $41m+46n=4(7m+5n)+13(m+2n)$. **825.** Используя равенства $\frac{1}{3\cdot5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$, $\frac{1}{5\cdot7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$, ..., $\frac{1}{99\cdot101}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)$, $\frac{1}{101\cdot103}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{101}-\frac{1}{103}\right)$, показать, что $S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{103}\right)=\frac{50}{309}$. **826.** Используя равенства $\frac{1}{2\cdot4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $\frac{1}{4\cdot6}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$, ..., $\frac{1}{96\cdot98}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{96}-\frac{1}{98}\right)$, $\frac{1}{98\cdot100}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{100}\right)$, показать, что $S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{100}\right)=0{,}245$. **827.** Если оба числа x и y делятся на 2 или оба не делятся на 2, то числа $x-y$ и $x+y$ делятся на 2 и поэтому число $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ делится на 4, но число 1990 не делится на 4; если же одно из чисел x, y делится на 2, а другое не делится на 2, то оба числа $x-y$ и $x+y$ не делятся на 2 и поэтому число $(x-y)(x+y)$ также не делится на 2, но число 1990 делится на 2. **828.** 1) Показать, что данное равенство можно записать так: $(x+1+y)(x+1-y)=7$. Так как делителями числа 7 являются пары (1; 7) и (–1; –7), то задача сводится к нахождению целых решений четырёх систем уравнений, решая которые найти искомые пары чисел: (3; 3), (3; –3), (–5; 3), (–5; –3). 2) Показать, что данное равенство можно записать в виде $(y+2+x)(y+2-x)=-4$. Так как делителями числа (–4) являются пары чисел (1; –4), (–1; 4), (2; –2) (в любом порядке), то задача сводится к нахождению целых решений шести систем уравнений, решая которые, найти искомые пары чисел: (2; –2), (–2; –2). **829.** Показать, что $\frac{n^5+3}{n^2+1}=n^3-n+\frac{n+3}{n^2+1}$. Осталось выяснить, при каких целых значениях n дробь $\frac{n+3}{n^2+1}$ является целым числом. Заметим, что при $n>2$ выполняется неравенство $n(n-1)>2$, откуда $n^2-n>2$, $n^2+1>n+3$, т. е. числитель дроби $\frac{n+3}{n^2+1}$ меньше знаменателя, и поэтому эта дробь при $n>2$ не может быть целым числом. При $n<-3$ выполняется неравенство $(-n)(n+1)<4$, откуда $-n^2-n<4$, $n^2+n>-4$, $n^2+1>-n-3$, $n^2+1>|n+3|$, т. е. модуль числителя дроби $\frac{n+3}{n^2+1}$ меньше положительного знаменателя дроби и поэтому эта дробь не может быть целым числом. Вычисляя значения данной дроби при $x=-3$; ±2; ±1; 0, показать, что целые значения получаются при $n = -3; \; -1; \; 0; \; 1; \; 2$. **830.** Показать, что $x^2 - xy + \frac{2}{7}y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{1}{28}y^2$. **831.** Умножить и разделить данное выражение на $(3 - 1)$, затем 5 раз применить формулу $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, получится $\frac{3^{32} - 1}{2}$. **832.** Показать, что $4x^2 + 9y^2 - 4x + 6y + 2 = (2x - 1)^2 + (3y + 1)^2$. **833.** Показать, что $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = \frac{1}{2}((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2)$. **834.** 1) $a^3 + 2a^2 - 3 = (a^3 - a^2) + (3a^2 - 3) = (a - 1)(a^2 + 3a + 3)$, 2) $a^3 + a^2 + 4 = (a^3 + 8) + (a^2 - 4) = (a + 2)(a^2 - a + 2)$; 3) $a^5 + a + 1 = (a^5 + a^4 + a^3) - (a^4 + a^3 + a^2) + (a^2 + a + 1) = (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1)$; 4) $a^3 - 6a^2 - a + 30 = (a^3 + 2a^2) - (8a^2 + 16a) + (15a + 30) = (a + 2)(a^2 - 8a + 15) = (a + 2)((a^2 - 3a) - (5a - 15)) = (a + 2)(a - 3) \times (a - 5)$. **835.** 1) $a^4 + 2a^2 - 3 = (a^4 - a^2) + (3a^2 - 3) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 3)$; 2) $a^4 + 4 = (a^4 + 4a^2 + 4) - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$; 3) $a^5 + a^2 - a - 1 = (a^5 - a^3) + (a^3 - a) + (a^2 - 1) = (a + 1)(a - 1)(a^3 + a + 1)$; 4) $a^4 - a^3 - 5a^2 - a - 6 = (a^4 + a^2) - (a^3 + a) - (6a^2 + 6) = (a^2 + 1)(a^2 - a - 6) = (a^2 + 1)((a^2 - 3a) + (2a - 6)) = (a^2 + 1)(a - 3)(a + 2)$. **836.** 1) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2b$; 2) $x^3 + y^3 = (x + y) \times (x^2 - xy + y^2) = (x + y)((x + y)^2 - 3xy) = a^3 - 3ab$; 3) $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (a^2 - 2b)^2 - 2b^2 = a^4 - 4a^2b + 2b^2$; 4) $x^5 + y^5 = (x^4 + y^4)(x + y) - (x^3 + y^3)xy = (a^4 - 4a^2b + 2b^2)a - (a^3 - 3ab)b = a^5 - 5a^3b + 5ab^2$. **837.** Доказать равенство $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2)$. **838.** 1) $\frac{a - 2}{a - 3}$; 2) $\frac{a - 1}{a + 1}$; 3) $\frac{a + 3b}{a + b}$; 4) $\frac{a - b}{a + b}$. **839.** В 8 ч утра. **840.** 300 м, 20 м/с. **841.** 5 км/ч, 11 км/ч. **842.** 1 ч. **843.** $\frac{s}{2t}$ м/с. **844.** 2,7%. **845.** 4 км. **846.** Первый. **847.** Первый. **848.** Первый. **849.** Первый. **850.** Второй. **851.** Второй.

Практические и прикладные задачи

Глава I.

1. 180 г. **2.** 336 г. **3.** $0{,}87N$ р. **4.** $\frac{K}{0{,}87}$ р. **5.** $0{,}174P$ р. **6.** $\left(14{,}5 - n - \frac{m}{60}\right)$ ч. **7.** $\left(1 - \frac{m}{100}\right)P$ Мегаватт. **8.** $\frac{ab}{k}$ м^2. **9.** 1) $P = I^2R$; 2) $P = \frac{U^2}{R}$. **10.** 1) 5 см; 2) 1,5 см. **11.** 1) 164,5 см; 2) 164,8 см. **12.** 1) 26°; 2) 29°. **13.** 198 см. **14.** $11\frac{1}{9}$%. **15.** 1) 21 см; 2) 29 см. **16.** 1) 148 л; 2) 206 л. **17.** 1) 60 л; 2) 64 л. **18.** 1) 3 341 000 р.; 2) 4 470 000 р. **19.** 1) 2065 р.; 2) 2363 р. **20.** $0{,}025m$ р.

Глава II.

2. 12 см, 17 см, 17 см. **3.** 15 см, 15 см, 6 см. **4.** 350 м. **5.** 60 м, 90 м. **6.** 10 витков. **7.** 4 см. **8.** 64 м. **9.** 625 шт. **10.** 80 шт., 88 шт., 68 шт. **11.** 72 000 акций, 216 000 акций, 162 000 акций.

Глава III.

1. 1) $1{,}5 \cdot 10^8$ км; 2) $6{,}37 \cdot 10^6$ км. **2.** $1{,}08 \cdot 10^5$ биений. **3.** Примерно в 80 раз. **4.** За 1,26 с. **5.** 1) $b^2 + \frac{b+a}{2} \cdot c$; 2) $ab - 2(mn + c^2)$. **7.** $(5k + 12m + 3n)$ р.; $\frac{5k + 12m + 3n}{20}$ р. **8.** $\frac{4}{3}\pi(a^3 - b^3)$. **9.** $2(n + m + b + x)$; $mn - ab - xy$. **10.** $4m^3 - 2m^2a - 2m^2b + abm$.

Глава IV.

1. 1) 4 см, 9 см. **2.** 20 см. **3.** 40 м, 5 м. **4.** $5(2T + 25)$ м. **5.** 10, 11, 12. **8.** $2^{64} - 1$. **9.** 11 и 10.

Глава V.

2. $\frac{8}{9}$ кг. **3.** 9,6 км/ч. **5.** 1) $R = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$; 2) $R_3 = \frac{RR_1R_2}{R_1R_2 - RR_1 - RR_2}$.
6. $v_0 = \frac{2s - at^2}{2t}$; 5 м/с. **7.** $m = \frac{FR^2}{\gamma M}$.

Глава VI.

1. 62; в XVII веке. **2.** 2008. **3.** $y = 60 - \frac{x}{15}$. **4.** 1935—1950 гг. — в); 1980—1995 гг. — б); 2001—2010 гг. — а). **5.** а). **6.** 50 кг, 60 кг, 71 кг. **7.** 1) 11 ч; 2) 9,5 ч. **8.** 1) 20; 2) 41. **10.** $y = 4 + 0{,}5x$; 1) 6,5 кг; 2) 4 месяца. **11.** $y = 1680 - 84x$; 1) 1260 р.; 2) 10 лет. **12.** $y = 30 + 5x$; 1) 40 мм; 2) 5 суток.

Глава VII.

1. 9 : 10. **2.** 300 м, 90 км/ч. **3.** 1040 г. **4.** 85 р., 70 р. **5.** 240 ц, 335 ц.

Глава VIII.

1. 1) 720; 2) 40 320. **2.** 1) 728; 2) 511. **3.** 23. **4.** 62. **5.** 64. **6.** Не хватило; 64. **7.** 11. **8.** 210. **9.** $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

11. 1)

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2)

2	7	6
9	5	1
4	3	8

12. 1)

3	1	2
1	2	3
2	3	1

2)

2	1	3
1	3	2
3	2	1

3)

3	2	1
1	3	2
2	1	3

4)

3	1	2
1	2	3
2	3	1

Задания «Проверь себя!»

Глава I.

1. а) 120,3; б) $-3\frac{1}{6}$. **2.** $4y+3x$, $\frac{1}{3}$. **3.** $10a+5b$. **4.** 0. **5.** $3x-4$. **6.** $2{,}94m+$ $+1{,}94n$. **7.** 10. **9.** Взнос третьего друга.

Глава II.

1. Да, $x=-4$. **2.** а) $x=\frac{1}{3}$, б) $x=3$. **3.** 7 м и 8 м. **5.** $x=-7$. **6.** 84 км. **7.** а) При $a\neq 6$; б) при $a=6$. **8.** $x=-5$. **9.** 150 км.

Глава III.

1. 5^5, 3^2, 2^{12}, 6^5. **2.** $3b+d$. **3.** $-1{,}25a^4b^3c^2$; $0{,}7m-2n-1$. **4.** $3m^2-4$, $-3{,}8125$. **5.** 100. **6.** $6a^3b+2a$; $2a^3b-4ab^3+4a$. **8.** $x=6$. **9.** $\frac{1}{5}$. **10.** а) a^2+6a-3; б) $-3a^2-1$; в) $-2a^4+3a^3+6a^2-9a+2$. **11.** 399.

Глава IV.

1. $2a^2+12a$. **2.** $y(x-2)$; $(4a-9)(4a+9)$; $3x^2(1-2x)$; $(x-5)^2$; $(x-1)(3+y)$; $2(a-b)^2$. **3.** $(a-3b)(a+3)$; 8. **4.** а) $(2-3n-3n^2)(2-3n+3n^2)$; б) $(6-a)^2$; в) $(x^2-1)^2(x^2+1)=(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)$; г) $\left(2b-\frac{1}{3}\right)\left(4b^2+\frac{2}{3}b+\frac{1}{9}\right)$. **5.** $1\frac{13}{37}$. **6.** $x=1{,}4$. **7.** $(x-4)(x-3)$. **8.** 49. **9.** При $a\neq 0$.

Глава V.

1. $b\neq 0$, $a\neq 1$, $b\neq -2$. **2.** $\frac{1}{a}$, $\frac{4ab}{a^2-b^2}$, $\frac{a-b}{b}$. **3.** $\frac{1}{x-3}$, -3. **4.** $a\neq -4$; b — любое число; $c\neq 0$, $c\neq 2$. **5.** $\frac{3x+2y}{5(3x-2y)}$; 1,4. **7.** $2(x-3)$. **8.** $x=-3$. **9.** a и b — любые числа; $b\neq 0$; $a\neq 3$, $a\neq -3$. **10.** 5 при $a>0$, -5 при $a<0$; 2 при $a>1$, -2 при $a<1$. **12.** 0. **13.** Если $a\neq -\frac{1}{3}$, то $x=\frac{3}{2(3a+1)}$; если $a=-\frac{1}{3}$, то корней нет.

Глава VI.

1. $y=0$; $x=18$; нет. **3.** Нет; да. **4.** 6 кв. ед. **5.** 16 ч, 5 ч 20 мин. **6.** $k=5$, $b=-3$. **7.** $y=2x+3$.

Глава VII.

1. Да. **2.** $(3; -1)$; $(1; -1)$. **3.** 8 кг яблок, 10 кг груш. **4.** а) $a=-3$; б) $a\neq -3$. **5.** $\left(x; \frac{39-4x}{9}\right)$ или $\left(\frac{39-9y}{4}; y\right)$. **6.** 37. **7.** $a\neq 3$. **8.** $a=-6$. **9.** В первом, в 2 раза.

Глава VIII.

1. а) 89, 98; б) 88, 89, 98, 99. **2.** 888, 889, 898, 899, 988, 989, 999. **3.** АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ, ВБА. **4.** а) 10, 15, 50, 51; б) 10, 11, 15, 50, 51, 55. **5.** 54. **6.** 6. **7.** 2500. **8.** 300. **9.** 9. **10.** 120.

Предметный указатель

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Колягин Юрий Михайлович
Ткачёва Мария Владимировна
Фёдорова Надежда Евгеньевна
Шабунин Михаил Иванович

АЛГЕБРА
7 класс

Учебник для общеобразовательных учреждений
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Н. Н. Сорокина*
Младшие редакторы *Е. А. Андреенкова, Е. В. Трошко*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Технический редактор *Т. М. Якутович*
Корректор *Н. А. Юсупова*
Компьютерная графика *С. А. Крутикова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 18.01.12. Формат 70×90 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура NewtonC SP. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 16,84+0,48. Тираж 10 000 экз. Заказ № 30897 (П-Пз).

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных материалов в ОАО «Смоленский полиграфический комбинат». 214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, д. 1.